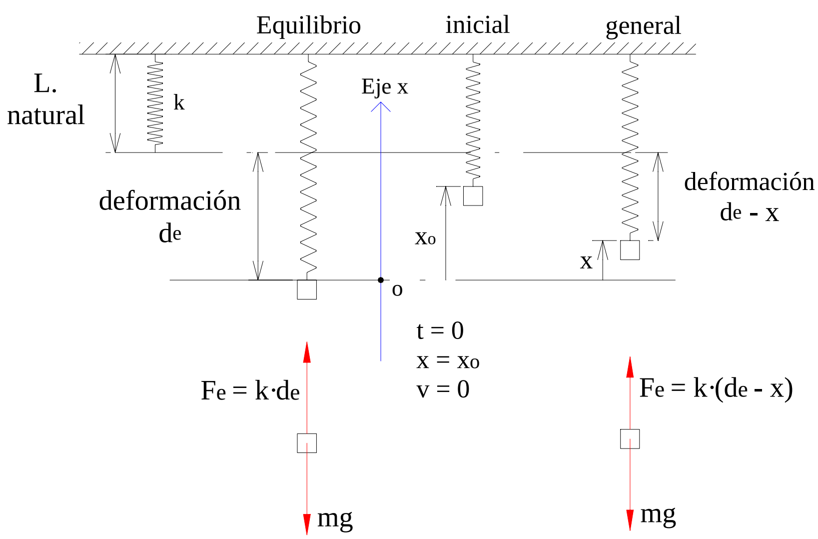
4.4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Como aplicación de las leyes de Newton vamos a presentar dos ejemplos importantes de movimiento oscilatorio.

1. EJEMPLO

Oscilación de una masa suspendida de un resorte

Consideremos un pequeño cuerpo de masa m, tratado como una partícula, suspendido verticalmente de un resorte de masa despreciable y constante k. Vamos a estudiar en primer término la posición de equilibrio de m y luego su movimiento cuando se suelta desde una cierta condición inicial. El punto de suspensión del resorte está fijo a un marco inercial ligado a tierra. El sistema mecánico es la masa m. Elijamos un eje *x* hacia arriba con origen en la posición de equilibrio. Vamos a dibujar comparativamente la longitud natural y tres situaciones importantes: la situación de equilibrio, la situación inicial y una situación general cualquiera, así como los diagramas de fuerzas en equilibrio y en situación general. Antes de hacerlo, es imperioso recordar que una realización experimental paralela de este fundamental movimiento es esencial para su comprensión.



En equilibrio, con d_e: deformación en equilibrio, la fuerza hecha por el resorte, F_e es

$$F_e = k\,d_e\,,$$

y entonces, como $\sum F_x = 0$,

$$k\,d_e - mg = 0\,.$$

Veamos la ecuación de movimiento de m, segunda ley de Newton en situación general. Usemos notación simple, es decir $a_x = a$. Con la magnitud de la fuerza elástica igual a k por la deformación, o sea $F = k(d_e - x)$, se tiene

$$\sum F_x = m a_x : \qquad k(d_e - x) - m g = m a ,$$

que, teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio, queda simplemente

$$-k x = m a .$$

La fuerza neta, resultante del peso y la fuerza elástica, $-k x$, es una fuerza recuperadora, dirigida siempre hacia la posición de equilibrio. La aceleración a es pues

$$a = -\frac{k}{m} x .$$

Llamemos ω^2, como es usual, a la constante positiva $\frac{k}{m}$. Como se comprueba fácilmente la dimensión de ω (letra griega omega minúscula), $[\omega]$, es T^{-1}. La ecuación

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x ,$$

o bien

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 ,$$

que también se escribe como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 ,$$

es la llamada ecuación diferencial del oscilador armónico, de gran importancia en la física y que va a aparecer en muchos otros movimientos. Una ecuación diferencial involucra funciones y sus derivadas. Resolverla es hallar una función que la satisface, cumpliendo además con unas condiciones iniciales determinadas. Buena parte de las ecuaciones fundamentales de la física son ecuaciones diferenciales. De hecho, cuando hicimos, por ejemplo, la cinemática de la caída libre, resolvimos la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = -g ,$$

con condiciones iniciales, en $t = 0$, $\begin{array}{l} x = 0 \\ \dot{x} = v_o \end{array}$, mostrando que la función $x(t)$ es,

$$x = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Ecuaciones más complejas requerirán métodos especiales, pero con el cálculo elemental podemos abordar la solución de la ecuación del oscilador, es decir encontrar cual es la función $x(t)$ que describe el movimiento de la masa m suspendida del resorte. Hagámoslo para unas condiciones iniciales simples, comunes y prácticas: demos a la masa un desplazamiento desde el equilibrio igual a $x_o\ (> 0)$ y soltémosla en $t = 0$. En este caso, $\dot{x} = v_o = 0$ y el problema es

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \ddot{x} = -\omega^2\, x. \quad \text{En } t = 0, \quad x = x_o \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dot{x}_o = 0 \\ \text{Hallar } x(t) \end{array}}$$

Usando la regla de la cadena,

$$\int_0^v v\, dv = -\omega^2 \int_{x_o}^x x\, dx\ ,$$

y por tanto

$$v = \omega \sqrt{x_o^2 - x^2}\ ,$$

en donde hemos tomado la raíz positiva. Como $v = \dfrac{dx}{dt}$, separando las variables e integrando de nuevo,

$$\int_{x_o}^x \frac{dx}{\sqrt{x_o^2 - x^2}} = \omega \int_o^t dt = \omega t$$

La integral de la izquierda es inmediata si se conocen las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Si no es así, se puede usar la sustitución $x = x_o \operatorname{sen} \phi$. El resultado es

$$\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{x_o}\Bigg]_{x_o}^{x} = \omega t = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{x_o} - \operatorname{arc\,sen} 1,$$

o sea

$$\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{x_o} = \omega t + \frac{\pi}{2}\ ,$$

y por tanto

$$x = x_o \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

o sea

$$\boxed{x(t) = x_o \cos \omega t}.$$

Siendo ωt un ángulo, adimensional, en radianes, ω tiene, como ya vimos, dimensiones T^{-1}. Se llama frecuencia angular y su unidad SI es $\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$.

El movimiento oscilatorio de m es un movimiento periódico muy importante, llamado movimiento armónico simple. La función coseno tiene período 2π y por tanto

$$x = x_o \cos \omega t = x_o \cos(\omega t + 2\pi) = x_o \cos \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right).$$

Así, cuando transcurre un tiempo llamado el período P,

$$P = \frac{2\pi}{\omega},$$

el movimiento se repite idénticamente. Como $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, el período es

$$\boxed{P = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}\ .$$

El movimiento es simétrico alrededor de la posición de equilibrio, extendiéndose desde $-x_o$ hasta x_o. El desplazamiento máximo desde el equilibrio se llama la amplitud del movimiento, en este caso x_o.

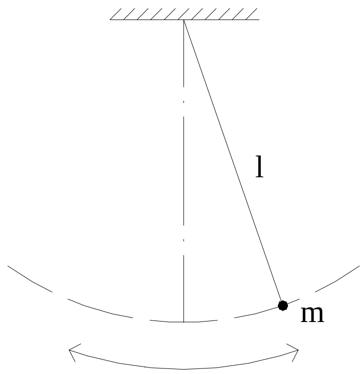
En realizaciones experimentales se miden la masa y el período para hallar k. Sin embargo, con resortes blandos y masas pequeñas, la idealización que hemos hecho al despreciar la masa del resorte no es buena. Para buscar cierta precisión es necesario tener en cuenta la masa del resorte. El problema es arduo y no lo abordaremos ahora, pero el resultado es simple. Si m_o es la masa del resorte, una mejor aproximación al período, con $m_o < m$, es

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_o}{3}}{k}}\ .$$

2. EJEMPLO

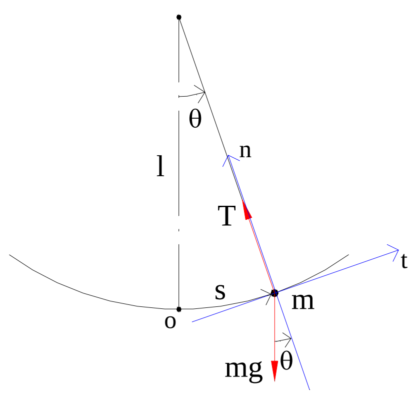
El péndulo simple

Un péndulo es un cuerpo suspendido verticalmente, que puede oscilar alrededor de la posición de equilibrio bajo la acción de la gravedad. El péndulo simple es una idealización en la cual una masa puntual o partícula está suspendida de una cuerda ideal y oscila en un plano vertical. Una pequeña esfera masiva atada a una cuerda proporciona una realización práctica adecuada.



El péndulo es un sistema mecánico de gran importancia histórica. Hombres tan ilustres como Galileo, Huygens y Newton, lo estudiaron intensamente, tanto teórica como experimentalmente. La riqueza de su física, de su matemática, de sus movimientos, lo convierten en un paradigma de la mecánica. Por eso es imperiosa una primera visita temprana al péndulo, tanto en el papel como en el laboratorio. Ya habíamos presentado algunas facetas del péndulo cónico e hicimos una presentación del movimiento en un círculo vertical. Vamos ahora a centrar la atención en las pequeñas oscilaciones del péndulo simple para hallar su período.

Sea un marco inercial ligado a tierra, como es usual. Elijamos un origen O sobre el círculo en la posición de equilibrio de m. El arco s y el correspondiente ángulo θ se indican en la figura. El sistema mecánico es m y su diagrama de fuerzas en posición general, así como las direcciones normal y tangencial, son:



El ángulo de mg con la dirección $-n$ es θ (correspondientes entre paralelas), y entonces la componente de la segunda ley en dirección t (elegida positiva en dirección de s y θ crecientes como se sabe), queda

$$- mg \ \operatorname{sen}\theta = m \frac{dv}{dt} = m \ell \alpha .$$

Por lo tanto

$$\alpha = -\frac{g}{\ell}\,\operatorname{sen}\theta\,.$$

Estudiemos ahora el caso particular llamado péndulo simple de pequeñas amplitudes, en el cual el péndulo oscila de modo que el máximo valor del ángulo θ es un ángulo pequeño.

Las funciones seno y coseno pueden expresarse en series de potencias así

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3\,!} + \frac{\theta^5}{5\,!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2\,!} + \frac{\theta^4}{4\,!} - \cdots$$

Si el ángulo θ es pequeño, las potencias $\theta^2,\ \theta^3, \cdots$ son muy pequeñas y podemos despreciarlas y la aproximación lineal queda

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta\,,$$

$$\cos\theta \approx 1\,.$$

Un límite bien conocido del cálculo establece que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1\,,$$

el cual también permite ver la importante aproximación de ángulos pequeños

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta\,,$$

donde θ está, por supuesto, en radianes. Es ilustrativo hacer la comparación en una calculadora para ángulos de 1 grado $\left(1\,\text{grado} \times \dfrac{2\,\pi\ \text{rad}}{360\,\text{grados}} = \dfrac{2\pi}{360}\ \text{rad}\right)$, 5 grados y 10 grados, para ver concretamente el grado de precisión con el cual $\operatorname{sen}\theta$ se aproxima a θ.

Con la aproximación para ángulos pequeños $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, la aceleración angular del péndulo queda

$$\alpha = -\frac{g}{\ell}\,\theta$$

Si llamamos, como se acostumbra,

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}\,,$$

siendo ω la frecuencia angular, podemos escribir la aceleración angular como

$$\alpha = \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta .$$

Es muy importante no confundir dicha frecuencia angular ω con la velocidad angular que tiene el péndulo en su movimiento circular, que escribiremos como $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Si damos al péndulo las siguientes condiciones iniciales: soltamos en $t = 0$ desde $\theta = \theta_o$, el problema del movimiento queda entonces

$$\boxed{\begin{array}{lll} \alpha = \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta . & \text{En } t = 0 & \theta = \theta_o \\ & & \dot{\theta} = 0 \\ \text{Hallar } \theta(t). & & \end{array}}$$

Este problema es el mismo que ya planteamos al estudiar las oscilaciones de una masa suspendida de un resorte. Simplemente, en vez de la posición $x(t)$, tenemos ahora la posición angular $\theta(t)$. El péndulo simple de pequeñas amplitudes describe por tanto un movimiento armónico simple

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o \cos \omega t} \; ,$$

con amplitud θ_o y cuyo período, recordando que $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$, es

$$\boxed{P = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}} \; .$$

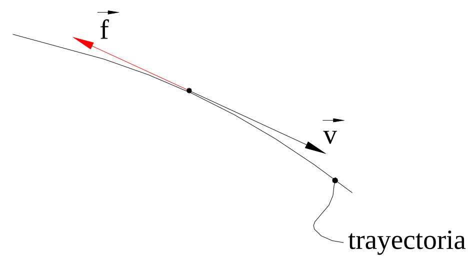
En el movimiento armónico simple, el período, es decir el tiempo que tarda una oscilación completa, no depende de la amplitud de la oscilación: El péndulo de pequeñas amplitudes, que describe un movimiento armónico simple, tiene esta propiedad y se dice que es isocrónico. Pero en un péndulo de amplitud cualquiera esto no es cierto, el péndulo no es isocrónico, es decir el período depende de la amplitud θ_o. Para una amplitud θ_o de unos $15°$, el error relativo que se comete al calcular el período con la expresión que vimos, respecto al período exacto, es de un 0.5%, lo que indica el grado de precisión al considerar la aproximación de pequeñas amplitudes.

4.5 FUERZAS DE FRICCIÓN EN FLUIDOS

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido, sea líquido o gas, el fluido opone una resistencia al movimiento del cuerpo, que representaremos globalmente como una fuerza de fricción $\vec{f}$ debida al medio fluido.

Esta resistencia o fuerza de fricción debida al fluido, llamada a veces fuerza resistiva, tiene las siguientes características:

a) Dirección: es una fuerza que se opone siempre al movimiento. Su dirección es contraria al vector velocidad del cuerpo. A diferencia de la fricción seca, en la fricción en fluidos no existe la fricción estática: si el cuerpo está en reposo en el fluido, la fricción es nula.



b) Magnitud: La magnitud de la fuerza opuesta por el fluido al movimiento del cuerpo, aumenta con la velocidad, es una función creciente de la velocidad. Para un amplio rango de valores de la velocidad v, la magnitud de la resistencia friccional f sobre el cuerpo puede describirse con la expresión

$$\boxed{\left|\vec{f}\right| = A\,v + B\,v^2},$$

en la que los coeficientes A y B son constantes positivas que dependen del cuerpo y del fluido. Vectorialmente puede expresarse la fuerza de fricción como

$$\vec{f} = -A\,\vec{v} - B\,v\,\vec{v}\,.$$

El primer término, Av, de magnitud proporcional a la velocidad, está directamente relacionado con la viscosidad del fluido, que es la fricción interna entre las capas de fluido, cuyas velocidades varían de una capa a otra. Es el término predominante a bajas velocidades.

El segundo término, Bv^2, de magnitud proporcional al cuadrado de la velocidad, es el término predominante a altas velocidades y está asociado con la turbulencia que se produce en el fluido por el movimiento del cuerpo. En la mecánica de fluidos se estudian detalladamente esas complejas fuerzas de fricción y esos coeficientes A y B, que dependen de la forma y tamaño del cuerpo y de las propiedades del medio fluido. En esta descripción introductoria los tomaremos como coeficientes empíricos.

Una consecuencia muy importante del hecho de que la fuerza resistiva aumente con la velocidad es la existencia de una **velocidad límite o terminal** para el movimiento.

Consideremos un cuerpo que parte del reposo y se mueve en un fluido bajo la acción de una fuerza constante F_o, que puede ser por ejemplo el peso en el caso de un cuerpo cayendo en el aire o en algún líquido. Supongamos por sencillez que el movimiento es rectilíneo. Bajo la acción de F_o, el cuerpo acelera, aumenta su velocidad. Pero entonces la fuerza de fricción que se opone al movimiento aumenta correspondientemente, y llega un momento en el que prácticamente la fuerza resistiva f iguala a la fuerza activa F_o. Así, la fuerza neta sobre el cuerpo se anula, la aceleración es cero, y el cuerpo sigue moviéndose con la velocidad adquirida, llamada velocidad límite o terminal. ¡Gracias a ello salimos incólumes de la granizada!

1. EJEMPLO

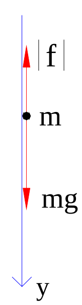
Esfera que cae verticalmente en aire. Velocidad límite

La fuerza resistiva sobre una esfera de radio r que se mueve en el aire con velocidad v, tiene una magnitud

$$f = 3.1 \times 10^{-4}\, r\, v + 0.87\, r^2 v^2,$$

en donde los coeficientes están en unidades SI. (Datos tomados de A.P. French. "Mecánica Newtoniana").

Consideremos una esfera que cae en el aire bajo la acción de su propio peso y alcanza una velocidad límite. Sea un eje *y* vertical hacia abajo. La fuerza neta hacia abajo sobre la esfera de masa m es $m g - |f|$ y



la componente de la segunda ley queda

$$m g - f = m a .$$

La velocidad terminal se adquiere cuando $a = 0$ y por tanto

$$m g = f .$$

Ahora, si la esfera tiene densidad ρ, su masa será $m = \rho \times \text{Volumen}$, y así

$$m = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3\, \rho\,.$$

Si consideramos una gota de lluvia de radio 2×10^{-3} m, como la densidad del agua es $\rho = 10^3$ kg m^{-3}, su velocidad terminal o límite, v_L será tal que

$$\frac{4}{3}\,\pi\, r^3\, \rho\, g = 3.1\times10^{-4}\, r\, v_L + 0.87\, r^2\, {v_L}^2\,,$$

(con todas las cantidades en SI) y entonces

$$v_L = 9.63 \text{ m s}^{-1}\,.$$

En caída libre, sin fricción con el aire, esta velocidad se adquiriría en un recorrido d

$$d = \frac{v_L^2}{2\,g} = 4.73 \text{ m}\,,$$

de modo que ya en distancias muy inferiores a esa los efectos de la fricción con el aire son importantes y el modelo de caída libre es inadecuado para estudiar la caída de una gota de lluvia de esas características. Si calculásemos la velocidad límite usando únicamente el término proporcional a v^2 tendríamos una velocidad

$$v_L' = \sqrt{\frac{4\,\pi\, r^3\, \rho\, g}{3\times 0.87\, r^2}} = 9.72 \text{ m s}^{-1}\,,$$

que difiere solo en un 1% respecto a los 9.63 m s^{-1}, lo que indica que el término proporcional a v^2 es el fundamental en una esfera de ese tamaño. Para cuerpos más densos y de mayor tamaño puede considerarse con buena aproximación que la fuerza resistiva está dada por

$$f = 0.87\, r^2\, v^2$$

Calcúlese como ejercicio la velocidad límite de una piedra esférica de $1\,\text{cm} = 10^{-2}$ m de radio, con densidad $\rho \approx 2.5\times10^3$ kg m^{-3}.

La fuerza viscosa, es decir el término proporcional a v de la fuerza resistiva, es dominante en el aire sólo en caso de esferas diminutas, como el caso de partículas de polvo, del orden de décimas a centésimas de milímetro de radio.

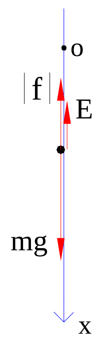
Dejamos como ejercicio el caso de un cuerpo, ya no de forma esférica, por ejemplo el de un paracaidista. La fuerza resistiva es $f = B\,v^2$. El valor aproximado de B es: 0.2 kg m^{-1} sin abrir el paracaídas y 20 kg m^{-1} con paracaídas abierto. Si la masa es de 60 kg, calcule la velocidad terminal en ambos casos.

2. EJEMPLO

Fuerza resistiva viscosa

En líquidos viscosos, la resistencia del fluido al movimiento de un pequeño cuerpo a bajas velocidades, puede representarse bien como una fuerza viscosa de magnitud proporcional a la velocidad, $\left| \vec{f} \right| = A\,v$. Supongamos que un cuerpo se suelta desde el reposo y cae verticalmente en un líquido con resistencia viscosa. Estudiar la velocidad en función del tiempo.

Sea un marco inercial ligado a tierra, respecto al cual el líquido está en reposo. Eje *x* hacia abajo con origen en dónde se suelta el cuerpo, que es el sistema mecánico, tratado como partícula de masa m. En situación general el diagrama de fuerzas es:



f es la magnitud de la fricción, $f = A\,v$. E es la fuerza de flotación o empuje arquimedeano, vertical hacia arriba e igual en magnitud al peso del fluido desalojado. En el caso del aire en el ejemplo anterior, despreciamos este empuje puesto que la densidad del aire, del orden de $1\ \text{kg m}^{-3}$, es muy pequeña, pero en un líquido, digamos el agua, con densidad de $10^3\ \text{kg m}^{-3}$, el empuje es una fuerza importante.

La componente de la segunda ley es

$$m\,g - E - A\,v = m\,a\,,$$

que, llamando F_o a la fuerza constante neta hacia abajo,

$$F_o = m\,g - E\,,$$

conduce a una aceleración

$$a = \frac{F_o - A\,v}{m}\,,$$

aceleración variable, dependiente de la velocidad. Para hacer la cinemática, las condiciones iniciales son, en $t = 0$, $x = 0$, $v = 0$. Con

$$\frac{d v}{d t} = \frac{F_o - A v}{m} ,$$

separando las variables para integrar

$$\int_o^v \frac{d v}{F_o - A v} = \frac{1}{m} \int_o^t d t = \frac{t}{m} .$$

La integral de la izquierda, como integral indefinida, es

$$\int \frac{d v}{F_o - A v} = \frac{1}{A} \int \frac{\frac{A}{F_o} d v}{1 - \frac{A}{F_o} v} = -\frac{1}{A} \int \frac{d \left(1 - \frac{A}{F_o} v\right)}{1 - \frac{A}{F_o} v} = -\frac{1}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{F_o} v\right) ,$$

que, volviendo a los límites de la integral definida, es

$$-\frac{1}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{F_o} v\right)\Bigg]_o^v = -\frac{1}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{F_o} v\right) = \frac{t}{m} ,$$

con lo que

$$\ln \left(1 - \frac{A v}{F_o}\right) = -\frac{A}{m} t ,$$

y así

$$1 - \frac{A v}{F_o} = e^{-\frac{A}{m} t} .$$

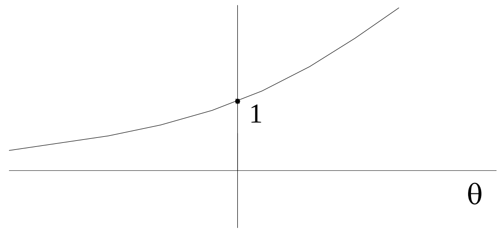
Por tanto

$$v = \frac{F_o}{A} \left(1 - e^{\frac{A}{m} t}\right) .$$

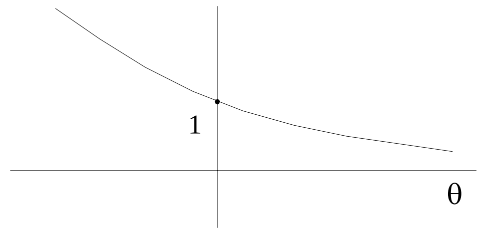
Dejamos como ejercicio la verificación de la coherencia dimensional.

Es importante construir cuidadosamente la gráfica de v contra t. Sugerimos al lector la siguiente secuencia de gráficas, partiendo de la gráfica fundamental de la exponencial, e^{θ} versus θ, con θ adimensional.

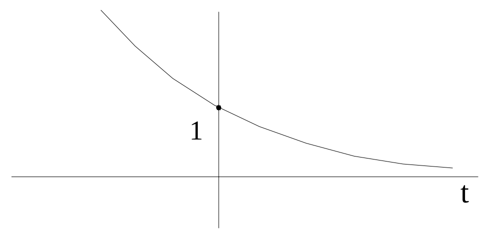
e^{θ}



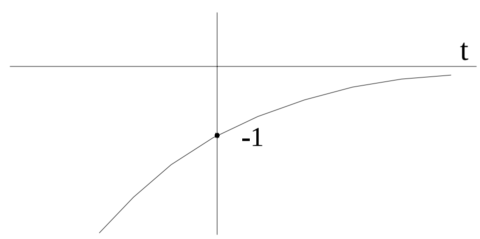
$e^{-\theta}$: inversión del eje θ
o de la gráfica:



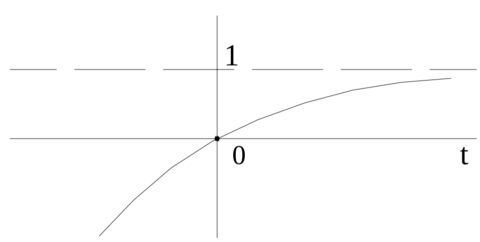
$e^{-\frac{A}{m}t}$: cambio de escala
del eje horizontal



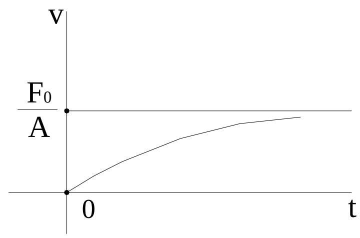
$-e^{-\frac{A}{m}t}$: inversión del eje
vertical



$1-e^{-\frac{A}{m}t}$: subir la gráfica 1
(o bajar 1 el eje t)



$\frac{F_o}{A}\left(1-e^{-\frac{A}{m}t}\right)$: cambio de escala en el eje vertical. Si sólo tomamos valores para $t \geq 0$, el gráfico de la velocidad versus t es:



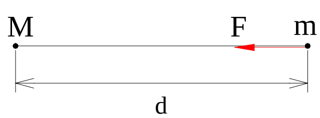
Cuando t es muy grande, $v \rightarrow \frac{F_o}{A}$, que es la velocidad límite o terminal, para la cual la aceleración es cero. En el modelo matemático, en rigor, la velocidad sólo se aproxima asintóticamente a la velocidad terminal y nunca llegaría a ella. El modelo es, sin embargo, sólo una idealización, y en la práctica la diferencia entre la velocidad real y la velocidad límite, se hace indetectable para una determinada precisión, al cabo de un cierto tiempo.

4.6 TIPOS DE FUERZAS. RESUMEN

Las fuerzas comunes de la mecánica que hemos presentado son:

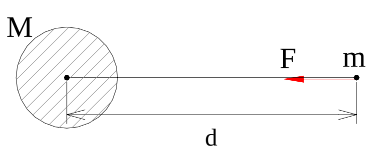
La fuerza de atracción gravitacional

En general, para dos masas puntuales (mostramos sólo la fuerza sobre m):



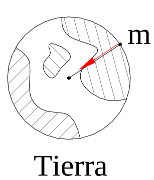
$$F = \frac{G\ M\ m}{d^2}$$

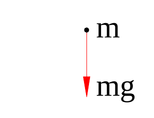
De una esfera (densidad con simetría esférica)



$$F = \frac{G\ M\ m}{d^2}$$

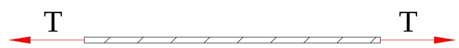
Caso particular: **El peso**



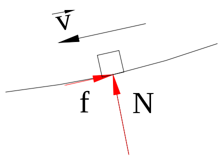


Fuerzas de contacto:

La tensión en una cuerda:



Entre superficies de sólidos:



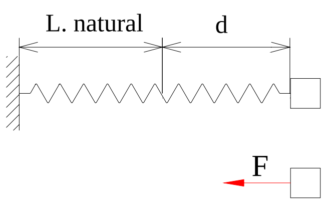
Normal N

Fricción f

Estática $f_e \leq \mu_e N$

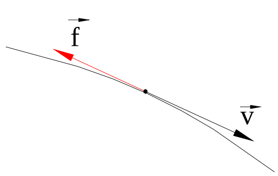
Dinámica $f_d = \mu_d N$

Fuerza elástica hecha por un resorte:



$$F = k\, d$$

Fuerza de fricción hecha por un fluido:



$$f = A\, v + B\, v^2$$

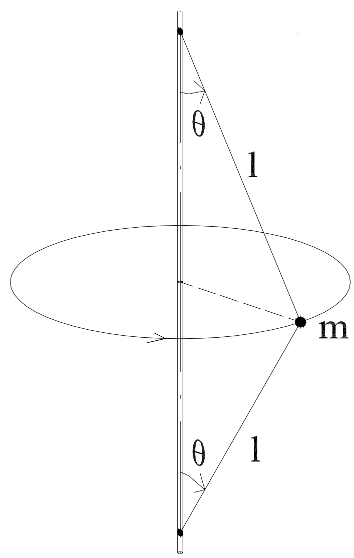
Otras fuerzas de contacto muy importantes son las que se presentan en una superficie que delimita una porción interior de un cuerpo, bien sea sólido o fluido. Estas fuerzas se estudian en la mecánica de los sólidos elásticos y de los fluidos.

PROBLEMAS

1. Un disco horizontal rota alrededor de su eje con una frecuencia de 1 Hz. Hallar la máxima distancia al centro del disco a la que puede colocarse un bloque para que no deslice respecto al disco, si el coeficiente estático de fricción entre el bloque y el disco es 0.5. Precise su marco inercial.

12 cm

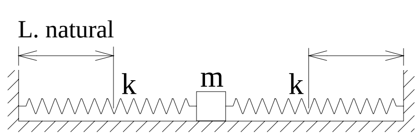
2. Una masa m gira en un círculo horizontal con velocidad angular constante ω, sostenida de un eje vertical por dos cuerdas de igual longitud ℓ y ángulos θ con dicho eje. Hallar las tensiones en la cuerdas.



Chequeo: si $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell \cos \theta}}$, la tensión en la cuerda inferior es nula.

3. Demuestre la igualdad de los períodos de dos péndulos cónicos de longitudes diferentes, pero suspendidos del mismo techo y tales que ambas masas están a la misma altura del piso.

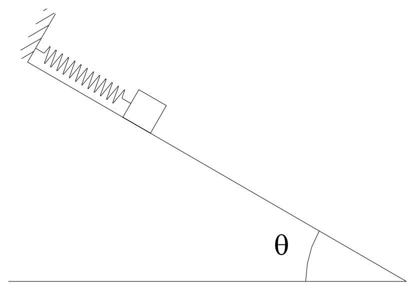
4.



Un bloque se encuentra en una superficie horizontal sujeto a dos resortes iguales, como se muestra. El coeficiente estático de fricción entre el bloque y la superficie es μ. Se llama zona de detención a la región en la que el bloque puede permanecer en reposo en la superficie. Eligiendo un origen en el centro, determine la zona de detención

$$|x| \leq \frac{\mu\ mg}{2k}$$

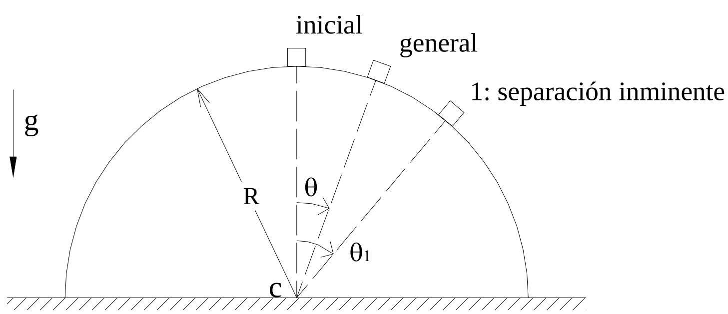
5.



Un resorte de constante k tiene un extremo fijo a la parte superior de un plano inclinado. Al otro extremo está sujeto un bloque de masa m que se suelta desde la longitud natural del resorte y baja deslizando por el plano inclinado liso. Hallar la velocidad del bloque como función de la posición. ¿Cuál es la máxima deformación del resorte? ¿En qué posición adquiere el bloque su máxima velocidad?

$$\text{en} \quad v_{\text{máxima}}, \quad \text{deformación} = \frac{mg\ \text{sen}\ \theta}{k}$$

6.

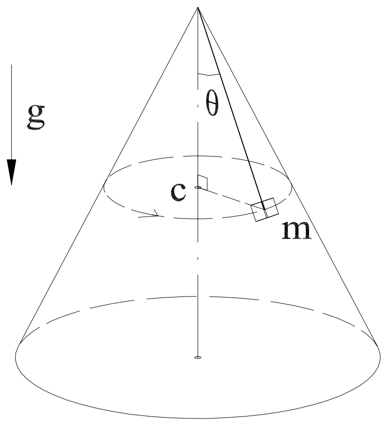


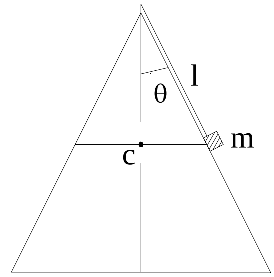
Un pequeño bloque se coloca sobre una superficie circular lisa de radio R. Podría ser bien una superficie esférica o cilíndrica, cuyo corte vertical es el círculo mostrado. Se le da al bloque una pequeñísima velocidad inicial en el punto más alto $(v_o \approx 0)$, de modo que baja deslizando por la superficie. Para la posición 1 en la que se despega de la superficie, hallar el ángulo θ_1 y la velocidad v_1.

$$\cos\theta_1 = \frac{2}{3}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

7.



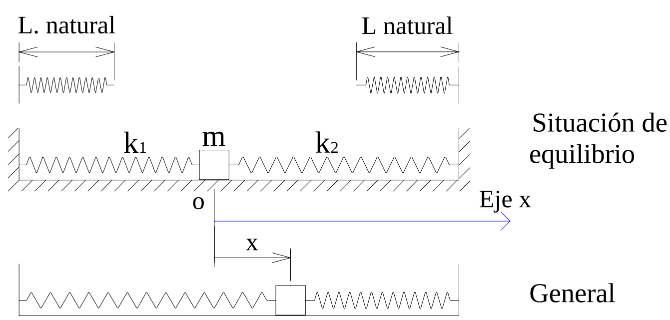


corte vertical

Una partícula de masa m describe un círculo horizontal, apoyada en una superficie cónica lisa y sostenida por una cuerda de longitud ℓ. Si la velocidad angular es ω, hallar la tensión en la cuerda y la reacción de la superficie.

Chequeo: si $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell \cos\theta}$ el bloque pierde contacto con la superficie.

8.



Un bloque de masa m puede deslizar sobre una superficie horizontal lisa, ligado a dos resortes como se muestra. Estudie la posición de equilibrio y muestre luego que la fuerza neta en situación general es una fuerza recuperadora dirigida hacia la posición de equilibrio y de magnitud $k_1\, x + k_2\, x$, es decir, como si el resorte (1) estuviese estirado *x*, y el resorte (2) estuviese comprimido *x*, desde la posición de equilibrio. Muestre que el movimiento de m es armónico simple y halle el período.

9. Hemos definido como peso la fuerza de atracción gravitacional hecha por la tierra sobre un cuerpo en su superficie. Llamemos peso aparente a la magnitud de la fuerza, hecha por ejemplo por una báscula de resortes, necesaria para mantener el cuerpo en reposo respecto a la superficie terrestre. Asumiendo una tierra completamente esférica y teniendo en cuenta su rotación, estudie un cuerpo en reposo sobre una báscula, tanto en

un polo como en el ecuador. Si la gravedad efectiva, g_{ef} , es tal que peso aparente es masa $\times g_{ef}$, halle la diferencia entre las gravedades efectivas en el polo y en el ecuador. Esta diferencia es sólo aproximada pues no tiene en cuenta el achatamiento de la tierra.

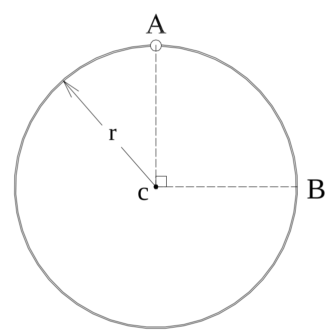
$$\Delta g_{ef} \approx 3.4 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

10. Un pequeño bote de masa m que viaja con velocidad v_o apaga su motor. Suponiendo que la resistencia de frenado es proporcional a la velocidad, $|f| = A\,v$, hallar la velocidad y la posición del bote en función del tiempo. Muestre que cuando el tiempo aumenta la velocidad tiende a cero y la distancia recorrida tiende a $\dfrac{m\ v_o}{A}$.

11. Un balde con agua gira en forma de péndulo cónico, suspendido del techo por una cuerda de 2 m cuyo ángulo con la vertical es de $30°$. Si el balde está goteando, hallar el radio del círculo descrito por las gotas en el piso que está 4 m abajo del techo.

1.90 m

12. Una pequeña cuenta o bolita perforada de masa m está ensartada en un alambre circular liso de radio r que se encuentra en un plano vertical.



Si la bolita se suelta desde la posición A, calcule la velocidad y la fuerza hecha por el alambre en la posición B.

$$v_B = \sqrt{2\,g\,r}$$

$$F_B = 2\ m\,g \text{ hacia el centro}$$

Calcule el tiempo que tarda la bolita en ir de A a B. La integral requiere un poco de cálculo. Cuando se intenta reemplazar el límite inicial, se obtiene un tiempo infinito (!). Esto se debe a que, en rigor matemático, si uno suelta la bolita en A con velocidad cero, allí permanecerá en la que se llama una posición de equilibrio inestable. Basta darle una pequeñísima velocidad para que se mueva.