CAPÍTULO 4. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL Y AJUSTE POLINOMIAL

INTRODUCCIÓN

En este capítulo trataremos básicamente dos problemas, el primero de los cuales es el siguiente:

Problema 1: Dados $n+1$ puntos de $\mathbf{R}^2$

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

en los cuales $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, se quiere encontrar un polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que **n** tal que

$$\boxed{p_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n}$$

Probaremos que un tal polinomio $p_n(x)$ siempre existe y además es único. A tal polinomio se le denomina **polinomio de interpolación**, **polinomio interpolante** o **polinomio de colocación** para los puntos (datos) dados. En este contexto los números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son llamados **nodos**. Cuando $n = 1$, es decir, sólo tenemos dos puntos, el polinomio de interpolación correspondiente se denomina también **polinomio de interpolación lineal**.

El caso de mayor interés para nosotros es aquel en el cual $y_k = f(x_k)$ siendo f una cierta función de la que posiblemente no se conoce una fórmula explícita, o bien es muy complicada para evaluarla, derivarla, integrarla, hallarle ceros, etc. En este caso el polinomio de interpolación $p_n(x)$ puede usarse como aproximación de la función f y, en particular, para aproximar valores de la función f en puntos intermedios entre los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Nos referiremos a esta manera de aproximar una función dada, mediante un polinomio de interpolación, como **interpolación polinomial**; cuando usemos sólo dos nodos, nos referiremos a la correspondiente interpolación como **interpolación lineal**. En este contexto el polinomio de interpolación $p_n(x)$ se dirá el **polinomio que interpola a la función** f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

El otro problema a tratar es:

Problema 2: Dados $n+1$ puntos de $\mathbf{R}^2$

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

en los cuales $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, y dado un entero no-negativo m, con $m < n$, se trata de encontrar un polinomio

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

tal que la suma de cuadrados

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(p_m(x_k)-y_k\right)^2}$$

sea mínima.

El criterio mediante el cual se elige el polinomio $p_m(x)$ es conocido como **criterio de los mínimos cuadrados**. Probaremos que tal polinomio $p_m(x)$ existe y es único; se le denomina **polinomio de ajuste según mínimos cuadrados** para los datos dados. Nótese que esta vez, a diferencia de lo que ocurre con el polinomio de colocación, $p_m(x_k)$ no necesariamente es igual a y_k para todo $k=0,1,...,n$. El polinomio $p_m(x)$ lo que da es un ajuste razonable a los datos dados.

Este tipo de aproximación mediante el polinomio de ajuste $p_m(x)$ se conoce como **ajuste polinomial**. Aunque el **ajuste polinomial** según mínimos cuadrados es el caso más usado, también consideraremos el caso de ajuste exponencial, logarítmico y de potencia según mínimos cuadrados.

4.1 INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

Teorema 4.1 (**existencia y unicidad del polinomio interpolante**) Dados los $n+1$ puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ de $\mathbf{R}^2$, con $x_0,x_1,...,x_n$ números distintos, existe un único polinomio

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

de grado menor o igual que **n**, que interpola los puntos dados, es decir, tal que

$$p_n(x_k)=y_k,\quad k=0,1,...,n$$

Demostración: Existe un único polinomio

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

tal que

$$p_n(x_k)=y_k,\quad k=0,1,...,n$$

si y sólo si existen números reales únicos $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ tales que

$$\begin{cases}a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n=y_0\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_nx_1^n=y_1\\ \qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_nx_n^n=y_n\end{cases}$$

El sistema anterior, de $n+1$ ecuaciones lineales en las $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, escrito en forma matricial es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{b}$$

Ahora bien, como

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

entonces $\det A \neq 0$ (porque si $i \neq j$, entonces $x_i \neq x_j$), y por tanto el sistema en consideración tiene solución única. Esto prueba la existencia de un único polinomio interpolante de grado menor o igual que **n** para los $n+1$ datos dados. ∇

Una forma de encontrar el polinomio interpolante para los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ es resolviendo directamente el sistema $AX = b$ que aparece en la prueba del teorema anterior; pero este procedimiento no se acostumbra porque, por lo general, la matriz de coeficientes de este sistema resulta mal condicionada, lo que puede ocurrir si dos abscisas están relativamente cerca. Lo que resta de esta sección lo dedicaremos a otras formas de encontrar el polinomio interpolante.

4.1.1 Forma de Lagrange del polinomio interpolante: Supongamos, para ilustración del método de Lagrange, que se tienen los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) con x_0, x_1 y x_2 números distintos y queremos encontrar el polinomio interpolante de grado menor o igual que dos

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

para dichos puntos.

Como $p_2(x_k) = y_k$, $k = 0,1,2$, entonces

$$\begin{cases} p_2(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ \\ p_2(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ \\ p_2(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

que es un sistema de tres ecuaciones lineales cuyas incógnitas son a_0, a_1 y a_2 .

Veamos que el determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es, como ya se dijo, $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$. En efecto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 \\ 0 & 1 & x_2 + x_0 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \neq 0$$

(Así que el sistema tiene solución única).

De acuerdo con la regla de Cramer

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

de donde

$$\Delta \cdot a_0 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = y_0\left(x_1x_2^2 - x_2x_1^2\right) - y_1\left(x_0x_2^2 - x_2x_0^2\right) + y_2\left(x_0x_1^2 - x_1x_0^2\right)$$

(Desarrollando el determinante por los cofactores de la primera columna)

Análogamente,

$$\Delta \cdot a_1 = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 \\ 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = -\, y_0\left(x_2^2 - x_1^2\right) + y_1\left(x_2^2 - x_0^2\right) - y_2\left(x_1^2 - x_0^2\right)$$

(Desarrollando el determinante por los cofactores de la segunda columna)

y

$$\Delta \cdot a_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = y_0(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_1 - x_0)$$

(Desarrollando el determinante por los cofactores de la tercera columna)

Por tanto

$$\begin{aligned}\Delta \cdot p_2(x) &= \Delta \cdot a_0 + \Delta \cdot a_1 x + \Delta \cdot a_2 x^2 \\ &= y_0 x_1 x_2 (x_2 - x_1) - y_1 x_0 x_2 (x_2 - x_0) + y_2 x_0 x_1 (x_1 - x_0) \\ &+ \left[-y_0(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + y_1(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) - y_2(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)\right]x \\ &+ \left[y_0(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_1 - x_0)\right]x^2 \\ &= (x_2 - x_1)y_0\left[x_1 x_2 - (x_2 + x_1)x + x^2\right] - (x_2 - x_0)y_1\left[x_0 x_2 - (x_2 + x_0)x + x^2\right] \\ &+ (x_1 - x_0)y_2(x_2 - x_1)\left[x_0 x_1 - (x_1 + x_0)x + x^2\right]\end{aligned}$$

Total que

$$\begin{aligned}\Delta \cdot p_2(x) = {} & y_0(x_2 - x_1)(x - x_1)(x - x_2) + y_1(x_0 - x_2)(x - x_0)(x - x_2) \\ & + y_2(x_1 - x_0)(x - x_0)(x - x_1)\end{aligned}$$

y entonces

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Si **definimos** los polinomios de grado dos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

entonces

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Observe que

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j \end{cases}, \quad j = 0,1,2, \qquad k = 0,1,2$$

y que, como era de esperarse, $p_2(x_k) = y_k, \; k = 0,1,2$.

Los polinomios $L_0(x)$, $L_1(x)$ y $L_2(x)$, se denominan **polinomios fundamentales de Lagrange** y el polinomio $p_2(x)$, obtenido de la manera anterior, se denomina **polinomio de interpolación de Lagrange** o **forma de Lagrange del polinomio interpolante** para los datos dados.

En general se tiene que:

Dados $n+1$ puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ con $x_0,x_1,\ldots,x_n$ números distintos, el **polinomio de interpolación de Lagrange** o la **forma de Lagrange del polinomio interpolante** para los datos dados es el polinomio

$$\boxed{p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_j L_j(x) + \ldots + y_n L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)}$$

donde

$$\boxed{L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)} \;,\quad j=0,1,\ldots,n}$$

Los polinomios $L_j(x)$, anteriores, se denominan **polinomios fundamentales de Lagrange**. Nótese que si se trata de $n+1$ puntos, tales polinomios son de grado **n**.

Observe que

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j \\ & \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j \end{cases} \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots,n, \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

y que para cada $k = 0,1,\ldots,n$,

$$\begin{aligned} p_n(x_k) &= y_0 \underbrace{L_0(x_k)}_{0} + y_1 \underbrace{L_1(x_k)}_{0} + \ldots + y_k \underbrace{L_k(x_k)}_{1} + \ldots + y_n \underbrace{L_n(x_k)}_{0} \\ &= y_k \end{aligned}$$

En el caso en que $y_k = f(x_k)$, $k = 0,1,\ldots,n$, la expresión para el polinomio de interpolación de Lagrange se convierte en

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_j)L_j(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x)$$

Caso particular: Calculemos el polinomio de **interpolación lineal**, correspondiente a los puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ con $x_0 \neq x_1$, usando la forma de Lagrange:

En este caso, el polinomio de interpolación de Lagrange es

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

siendo

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad y \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

es decir,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_0(x_1 - x) + y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 x_1 - y_0 x + y_1 x - y_1 x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_0 x_1 - y_0 x_0 + y_0 x_0 - y_0 x + y_1 x - y_1 x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_0(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Luego

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Nótese que $y = p_1(x)$ es la ecuación de la recta determinada por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1). ∇

Ejemplo 4.1 Supongamos que queremos aproximar la función $f(x) = \cos x$ sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mediante un polinomio de interpolación. Una forma razonable de hacerlo es mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que dos, $p_2(x)$, usando como **nodos** los números $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Como

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

y

$$f(x_0) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \;\; f(x_1) = \cos 0 = 1 \;\; y \;\; f(x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

entonces $p_2(x) = L_1(x)$, donde

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}{-\frac{\pi^2}{4}} = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2$$

Total que el polinomio de interpolación de Lagrange para la función $f(x) = \cos x$ en los nodos $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{\pi}{2}$, es

$$p_2(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2$$

Observe que $p_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = p_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $p_2(0) = 1$, como era de esperarse

La FIGURA 4.1 siguiente, muestra las gráficas de $y = \cos x$ y del polinomio interpolante obtenido $y = p_2(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2$.

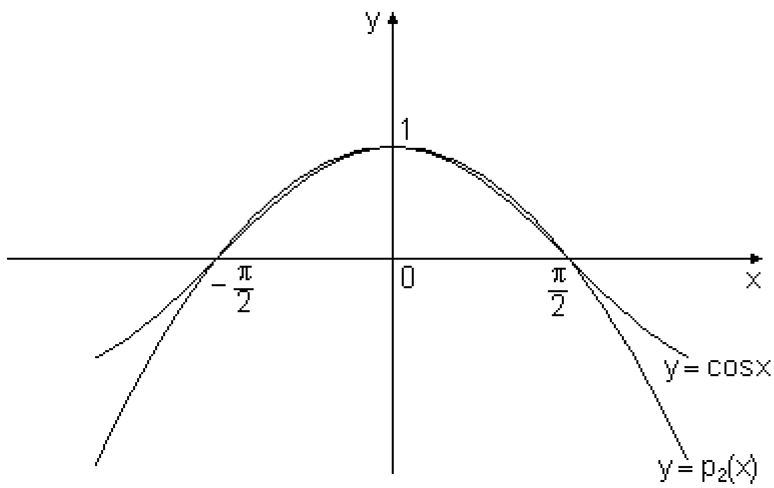

FIGURA 4.1

Si usamos el polinomio interpolante de Lagrange, $p_2(x)$, para aproximar $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx$ **.**71 , obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx p_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \ .75$$

Instrucción en DERIVE: Dados los $n+1$ datos $M:= [\,[x_0, y_0],[x_1, y_1],...,[x_n, y_n]\,]$:

POLY_INTERPOLATE(M, x): **S**implifica o apro**X**ima en el polinomio interpolante de grado menor o igual que n, $p_n(x)$, para los $n+1$ datos dados en la matriz M. Para el ejemplo anterior, **S**implifique la expresión POLY_INTERPOLATE($\left[\left[-\frac{\pi}{2},0\right],[0,1],\left[\frac{\pi}{2},0\right],x\right]$). ◊

Nota: Con el propósito de comparar el polinomio $p_2(x)$, obtenido en el ejemplo anterior, con el polinomio de Taylor de grado dos para $f(x)=\cos x$, alrededor de cero (polinomio de Maclaurin), calculamos este último a continuación:
Como

$$f(x)=\cos x, \quad f(0)=\cos 0=1$$
$$f'(x)=-\operatorname{sen} x, \quad f'(0)=-\operatorname{sen} 0=0$$
$$f''(x)=-\cos x, \quad f''(0)=-\cos 0=-1$$

entonces el polinomio de Maclaurin, ya mencionado, es $p(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$.

Si usamos el polinomio de Maclaurin $p(x)$ para aproximar el valor $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$,

obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx p\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} \approx \mathbf{.}69$$

Nótese que, en este caso, la aproximación que da el polinomio de Maclaurin para $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ es mejor que la que da el polinomio de interpolación. Como **ejercicio** compare los valores $p_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $p\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ con el valor exacto $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. ♦

En relación con el ejemplo anterior, tenemos que los otros dos polinomios fundamentales de Lagrange de grado dos para f usando los nodos $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$, $x_1=0$ y $x_2=\dfrac{\pi}{2}$, son

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-\pi)}=\frac{x^2-\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi^2}{2}}=\frac{2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{\pi}x$$

y

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)x}{\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{x^2+\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi^2}{2}}=\frac{2}{\pi^2}x^2+\frac{1}{\pi}x$$

Observe que

$$L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)=\frac{2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{\pi}x+1-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{2}{\pi^2}x^2+\frac{1}{\pi}x=1$$

Instrucción en DERIVE: Dados los $n+1$ datos M:= $[[x_0, y_0],[x_1, y_1],...,[x_n, y_n]]$:

LAGRANGE_POLY(M): **S**implifica o apro**X**ima en el polinomio de interpolación de Lagrange para los datos dados en la matriz M.

LAGRANGE_POLYS(M): **S**implifica o apro**X**ima en los $n+1$ polinomios fundamentales de Lagrange de grado n, $L_j(x)$, $j = 0,1,...,n$, para los datos dados en la matriz M, y vienen en la expresión $[[L_0(x)],[L_1(x)],...,[L_n(x)]]$. Para el ejemplo anterior, **S**implifique la expresión LAGRANGE_POLYS($\left[\left[-\frac{\pi}{2},0\right],[0,1],\left[\frac{\pi}{2},0\right]\right]$). ◊

En general, los polinomios fundamentales de Lagrange $L_j(x)$, $j = 0,1,...,n$, correspondientes a $n+1$ puntos dados, tienen la propiedad

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} L_j(x) = 1 \text{ para todo } x}$$

A continuación nos referiremos al **error** involucrado en la interpolación polinomial.

Si $p_n(x)$ es el polinomio que interpola a una función f en los números distintos $x_0, x_1,..., x_n$, y si x es un punto intermedio entre dichos números, entonces el **error** al aproximar $f(x)$ mediante $p_n(x)$ es

$$\boxed{E(x) = f(x) - p_n(x)}$$

En relación con este error se tiene el siguiente resultado cuya demostración puede ser consultada en Burden, 1985, páginas 103 y 104:

Teorema 4.2 Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$ y sea $p_n(x)$ el polinomio que interpola a f en los números distintos $x_0, x_1,..., x_n$ de dicho intervalo. Si f tiene sus primeras $n+1$ derivadas continuas en $[a,b]$, entonces para cada $x \in [a,b]$, el error $E(x) = f(x) - p_n(x)$ puede expresarse en la forma

$$\boxed{E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))}$$

donde $\xi(x)$ es un número que depende de x y $\xi(x) \in (a,b)$. ∇

Esta fórmula para el error es un resultado teórico importante, pues los polinomios de interpolación se usan por ejemplo, para deducir fórmulas de integración numérica y a partir de dicha fórmula de error se pueden obtener cotas para el error en la integración; sin embargo, en la práctica la fórmula del error en la interpolación es de uso muy restringido pues sólo se puede aplicar a funciones que tengan derivadas fácilmente acotables.

En relación con el ejemplo 4.1 tenemos que, si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces el error al aproximar $f(x) = \cos x$ mediante el polinomio de interpolación $p_2(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2$, obtenido usando los nodos $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{\pi}{2}$, es

$$|E(x)| = \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f'''(\xi(x)) \right| \quad \text{con } \xi(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

es decir,

$$|E(x)| = \left| \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{6} f'''(\xi(x)) \right| \quad \text{con } \xi(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como

$$f(x) = \cos x\,,\ f'(x) = -\operatorname{sen} x\,,\ f''(x) = -\cos x \ \text{ y } \ f'''(x) = \operatorname{sen} x$$

entonces

$$|f'''(\xi(x))| = |\operatorname{sen}(\xi(x))| \le 1 \ \text{ para toda } \xi(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

y por tanto

$$|E(x)| \le \frac{1}{6}\left| x\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) \right| \quad \text{para todo } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

En particular, para $x = \frac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\left| E\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \le \frac{1}{6}\left| \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{4}\right) \right| = \frac{\pi}{24}\left(\frac{3\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi^3}{128} \approx .24$$

Observe que el **error real** es

$$\left| E\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - p_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4} \right| \approx .043$$

que está por debajo de la cota teórica de error, ya calculada. ♦

Ejercicio 4.1 Use el polinomio interpolante de Lagrange para la función $f(x) = \cos x$ con nodos $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{\pi}{2}$, para estimar

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ **ii)** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ♦

Ejemplo 4.2 Use los polinomios interpolantes de Lagrange de grados uno, dos y tres, **más apropiados**, para aproximar $f(2.5)$, si $f(2.0) = .5103757$, $f(2.2) = .5207843$, $f(2.4) = .5104147$, $f(2.6) = .4813306$ y $f(2.8) = .4359160$.

Solución: Como $2.5 \in [2.4, 2.6]$, entonces el polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno, más apropiado, es el que se obtiene tomando los nodos $x_0 = 2.4$ y $x_1 = 2.6$, ya que éstos son los dos nodos más cercanos a 2.5.

Así que

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \\ &= f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} p_1(2.5) &= .5104147\frac{2.5 - 2.6}{2.4 - 2.6} + .4813306\frac{2.5 - 2.4}{2.6 - 2.4} \\ &= .2552074 + .2406653 \\ &= .4958727 \approx f(2.5) \end{aligned}$$

Para el caso de grado dos, hay dos polinomios interpolantes igualmente apropiados:

Un primer polinomio se obtiene tomando los nodos $x_0 = 2.2$, $x_1 = 2.4$ y $x_2 = 2.6$, lo que nos da

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} p_2(2.5) &= .5207843\frac{(2.5 - 2.4)(2.5 - 2.6)}{(2.2 - 2.4)(2.2 - 2.6)} + .5104147\frac{(2.5 - 2.2)(2.5 - 2.6)}{(2.4 - 2.2)(2.4 - 2.6)} \\ &\quad + .4813306\frac{(2.5 - 2.2)(2.5 - 2.4)}{(2.6 - 2.2)(2.6 - 2.4)} \\ &= -.06509804 + .3828110 + .1804990 \\ &= -.06509804 + .5633100 \\ &= .4982120 \approx f(2.5) \end{aligned}$$

El otro polinomio interpolante se obtiene tomando $x_0 = 2.4$, $x_1 = 2.6$ y $x_2 = 2.8$, y se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{p}_2(2.5) &= .5104147\frac{(2.5-2.6)(2.5-2.8)}{(2.4-2.6)(2.4-2.8)} + .4813306\frac{(2.5-2.4)(2.5-2.8)}{(2.6-2.4)(2.6-2.8)} \\ &\quad + .4359160\frac{(2.5-2.4)(2.5-2.6)}{(2.8-2.4)(2.8-2.6)} \\ &= .1914055 + .3609980 - .05448950 \\ &= .5524035 - .05448950 \\ &= .4979140 \approx f(2.5)\end{aligned}$$

Para grado tres el polinomio interpolante, más apropiado, se obtiene tomando los nodos $x_0 = 2.2$, $x_1 = 2.4$, $x_2 = 2.6$ y $x_3 = 2.8$, ya que $2.5 \in [2.2, 2.8]$ y 2.2, 2.4, 2.6 y 2.8 son los nodos más cercanos a 2.5. Así que

$$\begin{aligned}p_3(x) &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &\quad + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}p_3(2.5) &= .5207843\frac{(2.5-2.4)(2.5-2.6)(2.5-2.8)}{(2.2-2.4)(2.2-2.6)(2.2-2.8)} + .5104147\frac{(2.5-2.2)(2.5-2.6)(2.5-2.8)}{(2.4-2.2)(2.4-2.6)(2.4-2.8)} \\ &\quad + .4813306\frac{(2.5-2.2)(2.5-2.4)(2.5-2.8)}{(2.6-2.2)(2.6-2.4)(2.6-2.8)} + .4359160\frac{(2.5-2.2)(2.5-2.4)(2.5-2.6)}{(2.8-2.2)(2.8-2.4)(2.8-2.6)} \\ &= -.03254902 + .2871083 + .2707485 - .02724475 \\ &= .5578568 - .0597977 \\ &= .4980630 \approx f(2.5)\end{aligned}$$

Cuál es la aproximación obtenida, mediante el polinomio de interpolación, usando los nodos $x_0 = 2.0$, $x_1 = 2.2$, $x_2 = 2.4$ y $x_3 = 2.6$? (**ejercicio**)

Cuál de todas las aproximaciones calculadas es la mejor ?

Como la cota para el error en la interpolación requiere conocer hasta la cuarta derivada de la función f (la función de donde provienen los datos), y no disponemos de esa información, pues no conocemos una fórmula explícita para f, no podemos decidir cuál de las aproximaciones calculadas es la mejor. Sin embargo, de dos aproximaciones calculadas que utilicen el mismo número de nodos, se espera que sea mejor la que use los nodos más cercanos al dato a interpolar. ♦

Ejemplo 4.3 Suponga que se quiere construir una tabla para la función logaritmo natural, desde $x = 1$ hasta $x = 10$, de tal manera que la interpolación lineal usando dos nodos consecutivos de la tabla, tenga una precisión de seis cifras decimales exactas. Determine el **tamaño de paso h** más grande posible para dicha tabla.

Solución: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los nodos $x_0, x_1, ..., x_n$ en el intervalo [1,10] están igualmente espaciados. Entonces el **tamaño de paso** es

$$h = x_{k+1} - x_k,\quad k = 0,1,\ldots,n-1 \text{ con } x_0 = 1 \text{ y } x_n = 10$$

Por lo tanto

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 1+h,\quad x_2 = 1+2h,\ldots,\quad x_k = 1+kh,\ldots,\quad x_n = 1+nh = 10$$

y entonces para x con $x_k \le x \le x_{k+1}$, se tiene que el **error en la interpolación lineal**, usando los nodos x_k y x_{k+1}, es

$$\left| E(x) \right| = \left| f(x) - p(x) \right| = \frac{\left| f''(\xi(x)) \right|}{2!} \left| (x - x_k)(x - x_{k+1}) \right|$$

para algún $\xi(x) \in (x_k, x_{k+1})$.

Como $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, y entonces para $x \in [x_k, x_{k+1}]$, se tiene

$$\begin{aligned}\left| E(x) \right| &\le \frac{1}{2} \underset{x\in[x_k,x_{k+1}]}{\text{Máx}} \left| f''(x) \right| \underset{x\in[x_k,x_{k+1}]}{\text{Máx}} \left| (x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| \\ &= \frac{1}{2} \underset{x\in[x_k,x_{k+1}]}{\text{Máx}} \left(\frac{1}{x^2} \right) \underset{x\in[x_k,x_{k+1}]}{\text{Máx}} \left| (x - x_k)(x - x_{k+1}) \right|\end{aligned}$$

Si

$$g(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1}) = x^2 - (x_k + x_{k+1})x + x_k x_{k+1}$$

entonces

$$g'(x) = 2x - (x_k + x_{k+1}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

Como $g(x_k) = 0 = g(x_{k+1})$, y

$$g\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - x_k\right)\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - x_{k+1}\right) = \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)\left(\frac{x_k - x_{k+1}}{2}\right) = \frac{h}{2}\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{h^2}{4} \ne 0$$

entonces

$$\underset{x\in[x_k,x_{k+1}]}{\text{Máx}} \left| (x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| = \frac{h^2}{4},\quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Por otro lado, como

$$\underset{x\in[x_k,x_{k+1}]}{\text{Máx}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(x_k)^2},\quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

entonces para $x \in [x_k, x_{k+1}]$, se tiene que

$$\left| E(x) \right| \le \frac{1}{2} \frac{1}{(x_k)^2} \frac{h^2}{4},\quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Finalmente, como $x_k \in [1,10]$, $k = 0,1,\ldots,n$, entonces

$$\left|E(x)\right| \le \frac{1}{2}\frac{1}{1^2}\frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{8} \quad \text{para todo } x \in [1,10]$$

Para encontrar el tamaño de paso **h** más grande para la tabla, basta entonces resolver la desigualdad

$$\frac{h^2}{8} \le 5 \times 10^{-7} \quad \text{(porque se quieren } \mathbf{6} \text{ cifras decimales exactas)}$$

lo que nos da $h \le 2 \times 10^{-3} = .002$.

De acuerdo con este resultado, el tamaño de paso más grande para construir la tabla es $h = .002$. Así que si se toma, por ejemplo, el tamaño de paso $h = .001$ para construir la tabla, la interpolación lineal correspondiente (para dos nodos consecutivos), será exacta en por lo menos seis cifras decimales. Es claro que una tabla con estas características debe ser escrita con por lo menos siete cifras decimales. ♦

Otra forma de obtener el polinomio interpolante de grado menor o igual que n para una función f, a partir de $n+1$ datos conocidos, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, es la siguiente:

4.1.2 Forma de Newton del polinomio interpolante: Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números distintos y $y_k = f(x_k)$, $k = 0,1,\ldots,n$ para alguna función f definida en algún intervalo [a,b] que contiene a los nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. El polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que **n** que interpola a f en los datos dados, puede expresarse en la forma

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ \ldots \ + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

para ciertas constantes $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Cómo determinar los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n$?

Puesto que $p_n(x_k) = y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$p_n(x_0) = b_0 = f(x_0)$, así que

$$b_0 = f(x_0)$$

$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$, así que

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$p_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$, así que

$$b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

y después de realizar algunas manipulaciones algebraicas se tiene que

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Los otros coeficientes $b_3, b_4, ..., b_n$ se pueden obtener consecutivamente, siguiendo el método anterior.

Para facilitar la escritura de los coeficientes $b_0, b_1, ..., b_n$, del polinomio interpolante obtenido de esta manera, se introduce la siguiente notación de **diferencia dividida hacia adelante (progresiva) de Newton**.

Definición 4.1 Dados $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$ con $x_0, x_1, ..., x_n$ números distintos y f alguna función, definimos:

a) La diferencia dividida cero de f **con respecto a** x_k es

$$f[x_k] = f(x_k), \quad k = 0,1,2,...,n$$

(Así que, con respecto al polinomio interpolante $p_n(x)$, se tiene que $b_0 = f[x_0]$)

b) La diferencia dividida uno de f **con respecto a** x_k y x_{k+1} es

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0,1,...,n-1$$

Observe que las diferencias divididas uno dependen de las diferencias divididas cero y que, mientras hay $n+1$ diferencias divididas cero, hay **n** diferencias divididas uno. (También observe que $b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$)

c) La diferencia dividida dos de f **con respecto a** x_k, x_{k+1} y x_{k+2} es

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = 0,1,...,n-2$$

Observe que las diferencias divididas dos dependen de las diferencias divididas uno y que, mientras hay n diferencias divididas uno, hay $n-1$ diferencias divididas dos.

(También observe que $b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$)

d) En general, conocidas las $n-(i-1)+1 = n-i+2$ diferencias divididas $i-1$ de f con respecto a $x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+i-1}$, $f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+i-1}]$, $k = 0, 1, ..., n-(i-1)$, se definen las $n-i+1$ **diferencias divididas** i **de** f **con respecto a** $x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+i}$, así

$$f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+i}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+i}] - f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k}, \quad k = 0,1,...,n-i \qquad \nabla$$

Con esta notación de diferencia dividida se tiene que $b_i = f[x_0, x_1, ..., x_i]$, $i = 0,1,...,n$ y así el polinomio interpolante toma la forma

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... \\ + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \end{aligned}}$$

Esta forma del polinomio interpolante se conoce como **fórmula de diferencia dividida (progresiva) interpolante de Newton** o **forma progresiva de Newton del polinomio interpolante**, y se usa en los cálculos numéricos cuando se interpola en un punto x que está más cerca de x_0 que de x_n (suponemos ordenados los nodos $x_0, x_1, ..., x_n$) . Si el punto x en el cual vamos a interpolar está más cerca de x_n que de x_0 se usa la **fórmula de diferencia dividida (regresiva) interpolante de Newton**:

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... \\ + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1) \end{aligned}}$$

Es muy importante tener en cuenta que el polinomio progresivo y el polinomio regresivo de Newton son el mismo polinomio (siempre y cuando se usen los mismos datos); lo que ocurre es que en la fórmula progresiva el dato que más "pesa" es $f[x_0]$, mientras que en la regresiva el que más "pesa" es $f[x_n]$.

En el caso en que el dato a interpolar esté más cerca del nodo central (o los nodos centrales), se recomiendan otras diferencias divididas llamadas centradas, que no estudiaremos aquí.

La forma de Newton del polinomio interpolante es más ventajosa que la forma de Lagrange, pues el cálculo de los coeficientes en la forma de Newton va usando la información anterior, lo que no sucede con la forma de Lagrange.

Observe que dados $n+1$ datos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$, la forma progresiva de Newton del polinomio interpolante tiene la propiedad

$$p_i(x) = p_{i-1}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_i](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1}), \quad i = 2,3,\ldots,n$$

Una propiedad análoga se tiene para la forma regresiva del polinomio interpolante de Newton.

La TABLA 4.1 siguiente, muestra las diferencias divididas que hay que calcular para determinar los coeficientes del polinomio interpolante de Newton.

K	x_k	Diferencias divididas 0 $f(x_k) = f[x_k]$	Diferencias divididas 1 $f[x_k, x_{k+1}]$	$\ldots$	Diferencias divididas n $f[x_0, \ldots, x_n]$
0	x_0	$f[x_0] = b_0$	$f[x_0, x_1] = b_1$	$\ldots$	$f[x_0, \ldots, x_n] = b_n$
1	x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$\ldots$	
2	x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$\ldots$	
3	x_3	$f[x_3]$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$n-1$	x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1}, x_n]$		
n	x_n	$f[x_n]$			

TABLA 4.1

Observe que en la misma tabla pueden leerse los coeficientes para la forma progresiva y para la forma regresiva de Newton del polinomio interpolante.

En el caso particular $n = 1$, la forma de Newton del polinomio interpolante es

$$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

que coincide con la fórmula deducida para $p_1(x)$ en el caso de la forma de Lagrange del polinomio interpolante. Recuerde que el polinomio de interpolación es único.

Con respecto al **error** en la interpolación al usar la forma de Newton, tenemos:

Dada una función f definida en $[x_0, x_1]$. Si f es continua en $[x_0, x_1]$ y f' existe en (x_0, x_1), entonces el teorema del valor medio implica que existe $x \in (x_0, x_1)$ tal que $f'(x) = f[x_0, x_1]$.

En general, se tiene el siguiente resultado cuya demostración puede ser consultada en Burden, 1985, páginas 117 y 118:

Teorema 4.3 Si f es una función de valor real definida sobre el intervalo $[a,b]$, **n** veces continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números **distintos** en $[a,b]$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\boxed{f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}} \quad \nabla$$

Usando esta fórmula se puede llegar a una expresión para **estimar** el **error** al aproximar una función f mediante el polinomio interpolante de Newton, $p_n(x)$, a partir de los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, como se indica a continuación:

De la fórmula del error $E(x)$, dada al estudiar la forma de Lagrange del polinomio interpolante, tenemos que

$$f(x) = p_n(x) + \underbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))}_{E(x)} \qquad \textbf{(4.1)}$$

donde $\xi(x)$ es un número que depende de x y $\xi(x) \in (a,b)$.

De otro lado, usando la forma de Newton del polinomio interpolante de grado menor o igual que $n+1$ para f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, tenemos que

$$f(x) = p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \qquad \textbf{(4.2)}$$

Igualando las ecuaciones (4.1) y (4.2), concluimos que

$$\boxed{E(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)} \qquad \textbf{(4.3)}$$

donde para calcular $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$ usamos $p_n(x) \approx f(x)$. ∇

La ecuación (4.3) nos da una fórmula alternativa para **estimar el error** al usar un polinomio interpolante.

Ejemplo 4.4 Considere la siguiente tabla de datos

x	$f(x)$
2.0	.5103757
2.2	.5207843
2.4	.5104147
2.6	.4813306
2.8	.4359160

TABLA 4.2

Si queremos obtener una aproximación de $f(2.1)$ usando **todos los datos dados**, debemos elegir la forma **progresiva** del polinomio interpolante de Newton con todos los datos dados, y una escogencia adecuada para los nodos es $x_0 = 2.0$, $x_1 = 2.2$, $x_2 = 2.4$, $x_3 = 2.6$ y $x_4 = 2.8$, ya que $x = 2.1$ está más cerca de x_0 que de x_4.

Veamos qué resultados obtenemos si usamos los polinomios interpolantes de Newton más apropiados de **grados uno**, **dos**, **tres** y **cuatro**, para aproximar $f(2.1)$.

Empezamos calculando las diferencias divididas que se muestran en la TABLA 4.3 siguiente, donde el valor correspondiente a la diferencia dividida cuatro es $8.34125 \times 10^{-3} = b_4$ (que no aparece en la tabla).

k	x_k	$f(x_k) = f[x_k]$	Diferencias divididas 1	Diferencias divididas 2	Diferencias divididas 3
0	2.0	$.5103757 = b_0$	$.052043 = b_1$	$-.2597275 = b_2$	$.04299367 = b_3$
1	2.2	.5207843	$-.051848$	$-.2339313$	.04966667
2	2.4	.5104147	$-.1454205$	$-.2041313$	
3	2.6	.4813306	$-.227073$		
4	2.8	.4359160			

TABLA 4.3

Instrucción en DERIVE: Dados los $n+1$ puntos $M:=\left[[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]\right]$:

DIFERENCIAS_DIV(M): aproXima o **S**implifica en las $n+1$ diferencias divididas progresivas de Newton, $\left[f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\right]$, correspondientes a los $n+1$ puntos dados en la matriz M. Para este ejemplo, tome la matriz $M:=\left[[2.0, 0.5103757], [2.2, 0.5207843], [2.4, 0.5104147], [2.6, 0.4813306], [2.8, 0.4359160]\right]$ y apro**X**ime la expresión DIFERENCIAS_DIV(M). ◊

Entonces

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &= .5103757 + .052043(x - 2.0) \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} p_1(2.1) &= .5103757 + .052043(2.1 - 2.0) \\ &= .5155800 \approx f(2.1) \end{aligned}$$

Si usamos el polinomio más apropiado de grado dos

$$\begin{aligned}p_2(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\ &= p_1(x) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}p_2(2.1) &= p_1(2.1) - .2597275(2.1-2.0)(2.1-2.2)\\ &= .5155800 + .002597275\\ &= .5181773 \approx f(2.1)\end{aligned}$$

Si usamos el polinomio más apropiado de grado tres

$$\begin{aligned}p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\ &= p_2(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}p_3(2.1) &= p_2(2.1) + .04299367(2.1-2.0)(2.1-2.2)(2.1-2.4)\\ &= .5181773 + 1.289810\times 10^{-4}\\ &= .5183063 \approx f(2.1)\end{aligned}$$

Finalmente, si usamos el polinomio de grado cuatro

$$\begin{aligned}p_4(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\ &= p_3(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}p_4(2.1) &= p_3(2.1) + 8.341125\times 10^{-3}(2.1-2.0)(2.1-2.2)(2.1-2.4)(2.1-2.6)\\ &= .5183063 - 1.251169\times 10^{-3}\\ &= .5182938 \approx f(2.1)\end{aligned}$$

Si estamos interesados en aproximar $f(2.7)$ mediante el polinomio interpolante más apropiado de grado menor o igual que tres, a partir de los datos dados en la TABLA 4.3, debemos usar la forma **regresiva** de Newton del polinomio interpolante con los nodos $x_4 = 2.8$, $x_3 = 2.6$, $x_2 = 2.4$ y $x_1 = 2.2$, lo que nos da en este caso

$$\begin{aligned}\overline{p}_3(x) &= .4359160 - .227073(x-2.8) - .2041313(x-2.8)(x-2.6)\\ &\quad + .04966667(x-2.8)(x-2.6)(x-2.4)\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}\overline{p}_3(2.7) &= .4359160 - .227073(2.7-2.8) - .2041313(2.7-2.8)(2.7-2.6)\\ &\quad + .04966667(2.7-2.8)(2.7-2.6)(2.7-2.4)\\ &= .4359160 + .0227073 + 2.041313\times 10^{-3} - 1.490000\times 10^{-4}\\ &= .4606646 - 1.490000\times 10^{-4}\\ &= .4605156\end{aligned}$$

Como un **ejercicio** encuentre el polinomio interpolante regresivo de grado menor o igual que cuatro para los datos dados, $\overline{p}_4(x)$, y úselo para estimar $f(2.7)$. También estime $f(2.7)$ usando el polinomio $p_4(x)$ y compare los valores $p_4(2.7)$ y $\overline{p}_4(2.7)$. Aproxime también $f(2.5)$ usando $p_4(2.5)$ y $\overline{p}_4(2.5)$. ♦

Un algoritmo para encontrar los coeficientes $b_0, b_1, ..., b_n$ de la forma de Newton del polinomio interpolante es el siguiente.

Algoritmo 4.1 (Diferencias divididas progresivas) Para obtener los coeficientes $b_0, b_1, ..., b_n$ de la forma de Newton del polinomio interpolante usando diferencias divididas progresivas, conocidos $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$ con $x_0, x_1, ..., x_n$ números distintos:

Entrada: Los números $x_0, x_1, ..., x_n$, los valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$.

Salida: Los coeficientes $b_0, b_1, ..., b_n$ de la forma progresiva de Newton del polinomio interpolante

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + ... + b_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

Paso 1: Tomar $b_0 = f(x_0)$.

Paso 2: Para $i = 1,2,...,n$, hacer:

Para k = $0,1,...,n-i$, tomar

$$f(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+i} - x_k}$$

$$b_i = f(x_0)$$

Paso 3: **Salida:** "Los coeficientes del polinomio interpolante progresivo de Newton son $b_0, b_1, ..., b_n$". **Terminar**.

Ejercicio 4.2 La siguiente tabla corresponde a la función $f(x) = e^x$:

x	0	.5	1.0	2.0
f(x)	1.00000	1.64872	2.71828	7.38906

a) Aproxime $f(.25)$ usando interpolación lineal con $x_0 = 0$ y $x_1 = .5$.

b) Aproxime $f(.75)$ usando interpolación lineal con $x_0 = .5$ y $x_1 = 1.0$.

c) Aproxime $f(.25)$ y $f(.75)$ usando interpolación de grado menor o igual que dos con $x_0 = 0,\ x_1 = 1.0$ y $x_2 = 2.0$.

d) Cuál de las aproximaciones calculadas es la mejor? Por qué?

e) Aproxime $f(.25)$ usando el polinomio de interpolación de Newton de grado menor o igual que tres para los datos dados. ♦

Ejercicio 4.3 La siguiente tabla corresponde a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$:

x	.30	.32	.33	.35
f(x)	.29552	.31457	.32404	.34290

a) Encuentre una aproximación de $\operatorname{sen}(.34)$, usando el polinomio de interpolación de **Lagrange** de grado menor o igual que tres para los datos dados.

b) Encuentre una aproximación de $\operatorname{sen}(.34)$, usando el polinomio de interpolación de **Newton** más apropiado de grado menor o igual que tres.

c) Encuentre una cota para el error en cada aproximación. Cuál de las aproximaciones calculadas en **a)** y **b)** es mejor? ♦

Hasta aquí se han construido polinomios de grado menor o igual **n** para interpolar entre $n+1$ puntos dados. Como cuando **n** aumenta el polinomio interpolante $p_n(x)$ tiene más oscilaciones y ocurre a menudo que no aproxima bien a la función f, esto sugiere que se intente la interpolación pero localmente, es decir, por subintervalos.

La idea es que el intervalo que se tiene para interpolar los datos se descompone en una serie de subintervalos y se usan aproximaciones separadas para cada subintervalo, sujetas a que las aproximaciones deben coincidir, en algún sentido, en los extremos de los subintervalos. Este proceso de aproximación sobre subintervalos se conoce como **interpolación segmentaria** o **por segmentos**.

4.2 INTERPOLACIÓN SEGMENTARIA CÚBICA (CUBIC SPLINES)

Dados $n+1$ puntos $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),\ldots,(x_n,f(x_n))$ con $x_0,x_1,\ldots,x_n$ números distintos y f alguna función de valor real definida en un intervalo [a,b] que contiene a los nodos $x_0,x_1,\ldots,x_n$, se trata de aproximar la función f por segmentos o tramos, como se indica a continuación. Aquí se supone que

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

Una primera forma es aproximar la función f en cada subintervalo $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$, mediante un polinomio lineal, lo que se conoce como **interpolación segmentaria lineal**. Una segunda posibilidad es aproximar la función f en cada subintervalo $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$, mediante un polinomio cuadrático, lo que se conoce como **interpolación segmentaria cuadrática**, esta vez imponiendo algunas condiciones sobre el comportamiento de los polinomios aproximantes en cada segmento.

Finalmente tenemos la interpolación segmentaria cúbica, que es la más usada, la cual consiste en lo siguiente:

Se aproxima la función f en cada subintervalo $[x_k,x_{k+1}]$ mediante un polinomio de grado menor o igual que tres, el cual suponemos de la forma

$$\boxed{p_3^{(k)}(x)\equiv p_k(x)=a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3,\quad k=0,1,\ldots,n-1}$$

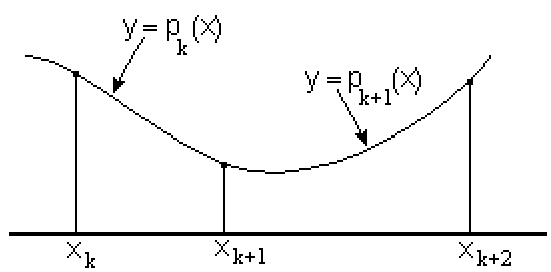

FIGURA 4.2

Son **n** polinomios de grado menor o igual que tres y cada uno con cuatro coeficientes incógnitas, así que tenemos un total de $4n$ **incógnitas** por determinar.

Las condiciones que deben satisfacer tales polinomios son:

i) $\begin{cases} p_k(x_k)=f(x_k)\,, & k=0,1,\ldots,n-1 \\ p_{n-1}(x_n)=f(x_n) \end{cases}$

(Condiciones de interpolación. Estas condiciones producen $n+1$ ecuaciones)

ii) $p_k(x_{k+1}) = p_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0,1,...,n-2$

(Condiciones de continuidad en los nodos interiores. Estas condiciones producen $n-1$ ecuaciones)

iii) $p'_k(x_{k+1}) = p'_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0,1,...,n-2$

(Condiciones de derivabilidad en los nodos interiores. Estas condiciones producen $n-1$ ecuaciones)

iv) $p''_k(x_{k+1}) = p''_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0,1,...,n-2$

(Condiciones de continuidad de la primera derivada en los nodos interiores: se conserva la concavidad en la vecindad del nodo interior, a no ser que la segunda derivada sea cero en el nodo interior. Estas condiciones dan lugar a $n-1$ ecuaciones)

Hasta aquí tenemos $n+1+3(n-1) = 4n-2$ condiciones.

v) Se satisface uno de los siguientes pares de **condiciones de frontera**:

a) $p''_0(x_0) = 0$ y $p''_{n-1}(x_n) = 0$

b) $p'_0(x_0) = f'(x_0)$ y $p'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$

Las **condiciones** dadas en **a)** se llaman **de frontera libre** (no dependen de condiciones adicionales sobre la función f).

Observe que en el caso **a)**, basta tener una lista de datos (x_k, y_k) con $x_0, x_1,..., x_n$ números distintos para poder realizar la interpolación segmentaria cúbica.

Las **condiciones** dadas en **b)** se llaman **de frontera sujeta**, requieren que se conozca $f'(x_0)$ y $f'(x_n)$, y fijan al polinomio $p_0(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, en el punto extremo x_0 , y al polinomio $p_{n-1}(x)$, $x \in [x_{n-1}, x_n]$, en el punto extremo x_n ; como en este caso se usa más información acerca de la función f las aproximaciones obtenidas suelen ser mas exactas. Si no se dispone de esta información sobre f se usarán las condiciones de frontera libre o unas buenas aproximaciones para $f'(x_0)$ y $f'(x_n)$.

Si definimos

$$\boxed{\begin{aligned} T: [x_0, x_n] &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\rightarrow T(x) = p_k(x), \quad \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}}$$

y $p_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n-1$, satisfaciendo las condiciones **i)-v)**, entonces T se dice un **Trazador o adaptador cúbico** para f en $[x_0,x_n]$. Si el **Trazador cúbico** satisface las condiciones **v)**, **a)**, se llama **natural**, y si satisface las condiciones **v)**, **b)** se llama **de frontera sujeta**. ∇

Nota: Si no se da una tabla de datos correspondiente a una cierta función f, ni condiciones de frontera, se entiende que un Trazador cúbico es una función como se definió antes, pero satisfaciendo las condiciones **ii)**, **iii)** y **iv)**.

Una forma de construir un Trazador cúbico para una función f en $[x_0,x_n]$ es la siguiente:

De acuerdo con la condición **i)**

$$\boxed{p_k(x_k)=a_k=f(x_k),\;\; k=0,1,\ldots,n-1 \quad y \quad p_{n-1}(x_n)=f(x_n)}$$

y si aplicamos la condición **ii)**, tenemos para $k=0,1,\ldots,n-2$,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= p_{k+1}(x_{k+1})=p_k(x_{k+1}) \\ &= a_k+b_k(x_{k+1}-x_k)+c_k(x_{k+1}-x_k)^2+d_k(x_{k+1}-x_k)^3 \end{aligned}$$

Si notamos $h_k=x_{k+1}-x_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$, usamos que $a_k=f(x_k)$, para $k=0,1,\ldots,n-1$ y **definimos** $a_n=f(x_n)$, entonces

$$a_{k+1}=a_k+b_kh_k+c_kh_k^2+d_kh_k^3\,, \quad k=0,1,\ldots,n-1 \qquad \textbf{(4.4)}$$

(ya que $a_n=f(x_n)=p_{n-1}(x_n)=a_{n-1}+b_{n-1}h_{n-1}+c_{n-1}h_{n-1}^2+d_{n-1}h_{n-1}^3$)

De otro lado $p_k'(x_k)=b_k$ para $k=0,1,\ldots,n-1$, y si aplicamos la condición **iii)**, obtenemos

$$b_{k+1}=p_{k+1}'(x_{k+1})=p_k'(x_{k+1})=b_k+2c_kh_k+3d_kh_k^2\,, \quad k=0,1,\ldots,n-2$$

Si **definimos** $b_n=p_{n-1}'(x_n)$, entonces

$$b_{k+1}=b_k+2c_kh_k+3d_kh_k^2\,,\;\; k=0,1,\ldots,n-1 \qquad \textbf{(4.5)}$$

(ya que $p_{n-1}'(x_n)=b_{n-1}+2c_{n-1}h_{n-1}+3d_{n-1}h_{n-1}^2$)

Ahora,

$$p_k''(x)=2c_k+6d_k(x-x_k)\,, \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

entonces

$$p_k''(x_k)=2c_k\,, \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

y si aplicamos la condición **iv)**, obtenemos

$$2c_{k+1} = p''_{k+1}(x_{k+1}) = p''_k(x_{k+1}) = 2c_k + 6d_k h_k$$

o sea

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k, \quad k = 0,1,...,n-2$$

Si **definimos** $p''_{n-1}(x_n) = 2c_n$, entonces

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k \ , \quad k = 0,1,...,n-1 \qquad \textbf{(4.6)}$$

(ya que $p''_{n-1}(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 2c_n$ o sea $c_n = c_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}$)

Despejando d_k de la ecuación (4.6), obtenemos

$$\boxed{d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \qquad k = 0,1,...,n-1} \qquad \textbf{(4.7)}$$

y sustituyendo en las ecuaciones (4.4) y (4.5), obtenemos

$$a_{k+1} = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} h_k^3$$

o sea

$$a_{k+1} = a_k + b_k h_k + \frac{h_k^2}{3}(2c_k + c_{k+1}), \quad k = 0,1,...,n-1 \qquad \textbf{(4.8)}$$

y

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3\frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} h_k^2$$

es decir,

$$b_{k+1} = b_k + h_k(c_k + c_{k+1}), \quad k = 0,1,...,n-1 \qquad \textbf{(4.9)}$$

Despejando b_k en (4.8), obtenemos

$$\boxed{b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1}) \ , \qquad k = 0,1,...,n-1} \qquad \textbf{(4.10)}$$

y aumentando el índice en uno en la ecuación (4.10), se tiene que

$$b_{k+1} = \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{h_{k+1}}{3}(2c_{k+1} + c_{k+2})$$

y sustituyendo en (4.9), se tiene que

$$\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{h_{k+1}}-\frac{h_{k+1}}{3}\left(2c_{k+1}+c_{k+2}\right)=\frac{a_{k+1}-a_k}{h_k}-\frac{h_k}{3}\left(2c_k+c_{k+1}\right)+h_k\left(c_k+c_{k+1}\right)$$

o sea

$$\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{h_{k+1}}-\frac{a_{k+1}-a_k}{h_k}=\frac{h_k}{3}\left(c_k+2c_{k+1}\right)+\frac{h_{k+1}}{3}\left(2c_{k+1}+c_{k+2}\right)$$

lo que nos lleva finalmente a que

$$\boxed{\begin{array}{l} h_k c_k+2\left(h_k+h_{k+1}\right)c_{k+1}+h_{k+1}c_{k+2}=\dfrac{3}{h_{k+1}}\left(a_{k+2}-a_{k+1}\right)-\dfrac{3}{h_k}\left(a_{k+1}-a_k\right) \\ \text{para } k=0,1,\ldots,n-2 \end{array}} \tag{4.11}$$

En este sistema final las incógnitas son c_k, $k=0,1,\ldots,n$, ya que $a_k=f(x_k)$, $k=0,1,\ldots,n$, y $h_k=x_{k+1}-x_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$, son conocidos.

Este sistema es de $n-1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas, pero si usamos las condiciones de frontera se introducen dos nuevas ecuaciones, con lo cual obtenemos un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. La pregunta que surge es si este sistema tiene solución y si la tiene saber si es única. La respuesta la dá el siguiente teorema.

Teorema 4.4 Si f es una función de valor real definida en un intervalo [a,b], entonces f tiene un único Trazador cúbico natural T en [a,b], o sea un trazador cúbico T que satisface las condiciones $T''(a)=0$ y $T''(b)=0$.

Demostración: Haciendo $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ y usando las condiciones de frontera libre

$$2c_0=p_0''(a)=T''(a) \text{ y } 2c_n=p_{n-1}''(b)=T''(b)$$

obtenemos $c_0=0$ y $c_n=0$.

Estas dos ecuaciones junto con las ecuaciones en (4.11) nos producen un sistema lineal $AX=b$ de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$
b=\begin{pmatrix}
0\\
\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)\\
\frac{3}{h_2}(a_3-a_2)-\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)\\
\vdots\\
\frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1})-\frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2})\\
0
\end{pmatrix}
$$

Como se ve la matriz A de coeficientes de este sistema es tridiagonal estrictamente dominante diagonalmente por filas, en consecuencia el sistema dado tiene solución única para $c_0, c_1, ..., c_n$.

Conocidos los valores de $c_0, c_1, ..., c_n$, podemos obtener los valores $b_0, b_1, ... b_{n-1}$ usando las ecuaciones **(4.10)** y los valores de $d_0, d_1, ... d_{n-1}$ usando las ecuaciones **(4.7)**, con lo cual se obtiene el único Trazador cúbico $T(x)$. ∇

También se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.5 Si f está definida en [a,b], entonces f tiene un único Trazador cúbico T en [a,b], que satisface $T'(a)=f'(a)$ y $T'(b)=f'(b)$.

En este caso los valores de $c_0, c_1, ..., c_n$ se determinan encontrando la única solución del sistema tridiagonal $AX=b$, donde

$$
A=\begin{pmatrix}
2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0\\
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & & & & 0\\
0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & 0\\
\vdots & & & & & & & \vdots\\
 & & & & & & & 0\\
0 & \cdots & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1}\\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1}
\end{pmatrix},\quad
X=\begin{pmatrix}
c_0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_{n-1}\\ c_n
\end{pmatrix}
$$

$$
b=\begin{pmatrix}
\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)-3f'(a)\\
\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)\\
\vdots\\
\frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1})-\frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2})\\
3f'(b)-\frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1})
\end{pmatrix}
$$

que tiene, como en el teorema anterior, matriz de coeficientes estrictamente dominante diagonalmente por filas. ∇

Conocidos los puntos $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),...,(x_n,f(x_n))$, un **algoritmo** para encontrar un Trazador cúbico para f en $[x_0,x_n]$, debe empezar por hacer: $a_k = f(x_k)$, $k=0,1,...,n$, calcular $h_k = x_{k+1}-x_k$, $k=0,1,...,n-1$, resolver el sistema $AX=b$ correspondiente y obtener a_k, b_k, c_k y d_k, $k=0,1,...,n-1$.

Recuerde que para cada $k=0,1,...,n-1$,

$$p_k(x) = a_k + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3$$

es el polinomio interpolante para f en $[x_k,x_{k+1}]$.

Ejemplo 4.5 Dada la función f definida por $f(x) = 3xe^x - 2e^x$ y la tabla siguiente:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.00	2.718282
1	1.05	3.286299
2	1.07	3.527609
3	1.10	3.905416

TABLA 4.4

Encontrar el Trazador cúbico natural T para f en [1.0,1.10] y usarlo para estimar $f(1.03)$.

Solución: Como los nodos x_0, x_1, x_2 y x_3 no están igualmente espaciados, debemos empezar encontrando h_0, h_1 y h_2 :

De acuerdo con los datos de la tabla, se tiene que

$$h_0 = x_1 - x_0 = .05,\ \ h_1 = x_2 - x_1 = .02,\ \ h_2 = x_3 - x_2 = .03$$

Ahora, como $p_0''(x_0) = 2c_0 = 0$ y $p_2''(x_3) = 2c_3 = 0$, entonces $c_0 = 0$ y $c_3 = 0$, así que debemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ .05c_0 + 2(.07)c_1 + .02c_2 = \dfrac{3}{.02}(3.527609 - 3.286299) - \dfrac{3}{.05}(3.286299 - 2.718282) \\ .02c_1 + 2(.05)c_2 + .03c_3 = \dfrac{3}{.03}(3.905416 - 3.527609) - \dfrac{3}{.02}(3.527609 - 3.286299) \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$c_0 = 0,\ \ c_1 = 13.22529,\ \ c_2 = 13.19694,\ \ c_3 = 0$$

Usando las ecuaciones (4.10), obtenemos

$$b_0 = 11.13992,\ \ b_1 = 11.80118,\ \ b_2 = 12.32963$$

y usando las ecuaciones (4.7), obtenemos

$$d_0 = 88.16863,\ \ d_1 = -.4725490,\ \ d_2 = -146.6327$$

y como

$$a_0 = 2.718282,\ \ \ a_1 = 3.286299,\ \ \ a_2 = 3.527609$$

(ya que $a_k = f(x_k),\ k = 0,1,\ldots,n$), entonces el Trazador cúbico natural T para f en $[x_0, x_3]$ es

$$\begin{aligned} T:&[x_0, x_3] \to \mathbf{R} \\ &x \quad \to T(x) = p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3, \\ &\qquad\qquad \text{si } \ x \in [x_k, x_{k+1}],\ \ k = 0,1,2 \end{aligned}$$

siendo

$$p_0(x) = 2.718282 + 11.13992(x - 1.00) + 0(x - 1.00)^2 + 88.16863(x - 1.00)^3,$$

$$p_1(x) = 3.286299 + 11.80118(x - 1.05) + 13.22529(x - 1.05)^2 - .4725490(x - 1.05)^3,$$

$$p_2(x) = 3.527609 + 12.32963(x - 1.07) + 13.19694(x - 1.07)^2 - 146.6327(x - 1.07)^3$$

Como $x = 1.03 \in [1.0, 1.05]$, entonces

$$\begin{aligned} f(1.03) \approx T(1.03) &= p_0(1.03) \\ &= 2.718282 + 11.13992(1.03 - 1.00) + 88.16863(1.03 - 1.00)^3 \\ &= 3.054860. \end{aligned}$$

Instrucción en DERIVE: Dados los $n+1$ puntos $M{:=}[[x_0, y_0],[x_1, y_1],\ldots,[x_n, y_n]]$:
TRAZADOR(M): **S**implifica o apro**X**ima en el Trazador cúbico natural correspondiente a los datos dados en la matriz M. El resultado es la matriz $[[x, p_0(x)],[x, p_1(x)],\ldots,[x, p_{n-1}(x)]]$.

Después de aproximar el TRAZADOR(M), se puede graficar el resultado, entrando los números x_k y x_{k+1}, correspondientes a los extremos del dominio del polinomio $p_k(x)$, para cada k, cuando DERIVE le solicite los valores Min y Max. Para el ejemplo anterior, tome la matriz $M{:=}[[1.0, 2.718282],[1.05, 3.286299],[1.07, 3.527609],[1.10, 3.905416]]$ y apro**X**ime la expresión TRAZADOR (M). ◊

Como **ejercicio** use el polinomio interpolante de Newton para f en los datos dados en el ejemplo 4.5, para estimar $f(1.03)$ y compare el resultado con el obtenido usando el Trazador cúbico natural. ♦

Dados cuatro o menos puntos, sabemos que existe un único polinomio de grado tres o menor que interpola a los datos dados, así que usaremos Trazadores cúbicos cuando tengamos cinco o más puntos.

Ejemplo 4.6 Determine todos los valores de a, b, c, d y e para los cuales la siguiente función es un Trazador cúbico

$$T(x)=\begin{cases} a(x-2)^2+b(x-1)^3, & x\in(-\infty,1] \\ c(x-2)^2, & x\in[1,3] \\ d(x-2)^2+e(x-3)^3, & x\in[3,+\infty) \end{cases}$$

Además, determine los valores de los parámetros de modo que el trazador interpole la siguiente tabla

x	0	1.0	4.0
y	26.0	7.0	25.0

Solución: Para que $T(x)$ sea un trazador cúbico en $(-\infty,+\infty)$, debe satisfacer:

i) $T(x)$ debe ser continua en todo punto de $(-\infty,+\infty)$, y como lo es en $(-\infty,1)$, (1,3) y $(3,+\infty)$, por ser polinómica en cada uno de estos intervalos, debemos imponer condiciones para que sea continua en los números 1 y 3. Debe tenerse que

$$\lim_{x\to1^-}T(x)=T(1)=\lim_{x\to1^+}T(x) \quad y \quad \lim_{x\to3^-}T(x)=T(1)=\lim_{x\to3^+}T(x)$$

es decir,

$$a(1-2)^2+b(1-1)^3=T(1)=c(1-2)^2 \quad y \quad c(3-2)^2=T(3)=d(3-2)^2+e(3-3)^3$$

o sea que debe tenerse $a=c$ y $c=d$.

ii) $T(x)$ debe ser derivable en todo punto de $(-\infty,+\infty)$, y como lo es en $(-\infty,1)$, (1,3) y $(3,+\infty)$, por ser polinómica en cada uno de estos intervalos, debemos imponer condiciones para que sea derivable en los números 1 y 3, lo cual se tiene si

$$T'_-(1)=T'_+(1) \quad y \quad T'_-(3)=T'_+(3)$$

es decir, si

$$2a(1-2)+3b(1-1)^2=2c(1-2) \quad y \quad 2c(3-2)=2d(3-2)+3e(3-3)^2$$

o sea, si $-2a=-2c$ y $2c=2d$, o equivalentemente si $a=c$ y $c=d$, que como vemos son las mismas condiciones obtenidas en **i)**.

iii) $T(x)$ debe tener primera derivada continua en todo punto de $(-\infty,+\infty)$, y como la derivada es continua en $(-\infty,1)$, (1,3) y $(3,+\infty)$, por ser polinómica en cada uno de estos intervalos, sólo hay que considerar los casos $x=1$ y $x=3$, es decir, debe tenerse $T''(1)=2a+6b(1-1)=2c$ y $T''(3)=2d+6e(3-3)=2c$, o sea $a=c$ y $c=d$.

Hasta aquí, sin condiciones de interpolar una tabla de datos dada, los coeficientes a, b, c, d y e del Trazador cúbico $T(x)$, deben satisfacer $a=c=d$ y b, e arbitrarios.

Para que el Trazador cúbico interpole la tabla de datos dada, los parámetros a, b, c, d y e deben satisfacer las siguientes ecuaciones

$$T(0)=a(0-2)^2+b(0-1)^3=26$$
$$T(1)=a(1-2)^2+b(1-1)^3=c(1-2)^2=7$$
$$T(4)=d(4-2)^2+e(4-3)^3=25$$

lo que nos conduce al siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} 4a-b=26 \\ a=c=7 \\ 4d+e=25 \end{cases}$$

cuya solución es

$$a=c=7,\ b=2\ \text{ y }\ e=-3$$

Pero de las condiciones obtenidas antes, se tiene que $a=c=d$, así que en definitiva el Trazador cúbico que interpola la tabla de datos dada es

$$T(x)=\begin{cases} 7(x-2)^2+2(x-1)^3, & x\in(-\infty,1] \\ 7(x-2)^2, & x\in[1,3] \\ 7(x-2)^2-3(x-3)^3, & x\in[3,+\infty) \end{cases}$$

Es el Trazador cúbico obtenido un Trazador cúbico natural?

Como $T''(1)=14\neq 0$, entonces el Trazador cúbico obtenido no es natural. ♦

4.3 AJUSTE DE UN POLINOMIO POR MÍNIMOS CUADRADOS (REGRESIÓN POLINOMIAL)

Hasta ahora hemos estudiado el problema de aproximar una función $y = f(x)$ por un polinomio interpolante a partir de una serie de datos conocidos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$.

En esta parte se estudiará el siguiente problema:

Supongamos que existe una relación funcional $y = f(x)$ entre dos cantidades x e y, con f desconocida y se conocen valores y_k que aproximan a $f(x_k)$, es decir,

$$f(x_k) = y_k + \in_k,\ k = 0, 1, ..., n$$

con $\in_k$ desconocido.

Se trata de recuperar la función f a partir de los datos aproximados y_k, $k = 0, 1, ..., n$.

Este problema se conoce como un problema de "**ajuste de datos**" o "**ajuste de curvas**" **(caso discreto)**. Trabajaremos básicamente el caso en el que f es una función polinómica.

Si f es una función polinómica, digamos $f(x) = p_m(x)$, entonces el problema se convierte en: Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ con $x_0, x_1, ..., x_n$ números reales distintos, se trata de encontrar un polinomio

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m, \quad \text{con } m < n$$

que "**mejor se ajuste**" a los datos. Lo de "**mejor ajuste**" se entenderá en el sentido de que

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

sea mínimo, es decir, que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2$$

sea mínimo.

Este criterio de mejor ajuste, como ya se mencionó antes, se conoce como **mínimos cuadrados**, y el método para obtener los polinomios que mejor se ajustan según mínimos cuadrados se llama **Regresión polinomial**.

4.3.1 Regresión polinomial: Supongamos que se conocen los datos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, con $x_0, x_1, ..., x_n$ números **distintos** y se desea encontrar un polinomio

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m, \qquad \text{con} \;\; m < n$$

tal que

$$S(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + ... + a_m x_k{}^m - y_k\right)^2$$

sea mínima.

El grado **m** del polinomio $p_m(x)$ se puede escoger previamente con base en algún resultado teórico, alguna expectativa o por la aplicación que se le pretenda dar al polinomio. En cualquier caso estamos "libres" de elegir el grado que parezca mejor. En muchos casos el grado será uno y el polinomio obtenido se llamará la **recta que mejor se ajusta** o **la recta de mínimos cuadrados** para la tabla de datos.

Volviendo a la función $S(a_0, a_1, ..., a_m)$, una condición necesaria para la existencia de un mínimo relativo de esta función es que las derivadas parciales de $S(a_0, a_1, ..., a_m)$ con respecto a a_j, $j = 0,1,...,m$ sean cero.

Resultan entonces las siguientes $m+1$ ecuaciones lineales en las incógnitas $a_0, a_1, ..., a_m$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{k=0}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + ... + a_m x_k^m - y_k\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{k=0}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + ... + a_m x_k{}^m - y_k\right)(x_k) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = \sum_{k=0}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + ... + a_m x_k^m - y_k\right)\left(x_k^2\right) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum_{k=0}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + ... + a_m x_k^m - y_k\right)\left(x_k^j\right) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = \sum_{k=0}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + ... + a_m x_k^m - y_k\right)\left(x_k^m\right) = 0$$

Si en las ecuaciones anteriores cancelamos el **2**, desarrollamos los paréntesis y usamos que $\sum_{k=0}^{n} a_0 = (n+1)a_0$, obtenemos

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a_1 + \ \dots\ + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^m\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)a_1 + \ \dots\ + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \\ \vdots \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^j\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{1+j}\right)a_1 + \ \dots\ + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{m+j}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^j y_k \\ \vdots \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^m\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{1+m}\right)a_1 + \ \dots\ + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{2m}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^m y_k \end{cases}$$

Este es un sistema de $m+1$ ecuaciones lineales en las $m+1$ incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_m$, que se llama sistema de **ECUACIONES NORMALES**. Este sistema de ecuaciones normales se puede escribir en forma simplificada como sigue:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} = \sum_{k=0}^{n} x_k^j y_k \ , \qquad j = 0,1,\dots,m$$

Estas ecuaciones se pueden reproducir a partir de

$$p_m(x_k) = a_0 + a_1 x_k + \dots + a_m x_k^m = y_k$$

multiplicando a ambos lados por $x_k^j,\ j = 0,1,\dots,m$,

$$a_0 x_k^j + a_1 x_k^{1+j} + \dots + a_m x_k^{m+j} = x_k^j y_k$$

y luego sumando sobre **k**

$$a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k^j + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^{1+j} + \dots + a_m \sum_{k=0}^{n} x_k^{m+j} = \sum_{k=0}^{m} x_k^j y_k \ , \qquad j = 0,1,\dots,m$$

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones normales es simétrica y no singular, siempre que las $x_k,\ k = 0,1,\dots,n$, sean distintas, por lo tanto el sistema tiene solución única. Aunque la matriz puede estar mal condicionada cuando **m** es grande.

Para ver que la matriz A de coeficientes del sistema de ecuaciones normales es no-singular, mostraremos que la matriz

$$B=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}$$

es tal que $B^T B = A$ y B tiene **todas** sus columnas linealmente independientes.

En efecto:

$$B^T B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^m & x_1^m & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}_{(m+1)\times(n+1)} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}_{(n+1)\times(m+1)}$$

$$B^T B=\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{k=0}^{n} x_k & \sum_{k=0}^{n} x_k^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n} x_k^m \\ \sum_{k=0}^{n} x_k & \sum_{k=0}^{n} x_k^2 & \sum_{k=0}^{n} x_k^3 & \cdots & \sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1} \\ \sum_{k=0}^{n} x_k^2 & \sum_{k=0}^{n} x_k^3 & \sum_{k=0}^{n} x_k^4 & \cdots & \sum_{k=0}^{n} x_k^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} x_k^m & \sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1} & \sum_{k=0}^{n} x_k^{m+2} & \cdots & \sum_{k=0}^{n} x_k^{2m} \end{pmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} = A$$

Ahora, las columnas de B son

$$X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ X_1=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix},\ldots,\ X_m=\begin{pmatrix} x_0^m \\ x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix} \text{ con } x_0,x_1,\ldots,x_n \text{ distintos y } m<n$$

Sean $c_0, c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ tales que $c_0X_0 + c_1X_1 + \ldots + c_mX_m = 0$ y veamos que $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$.

Como

$$c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_mX_m = c_0\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}x_0^2\\x_1^2\\\vdots\\x_n^2\end{pmatrix} + \ldots + c_m\begin{pmatrix}x_0^m\\x_1^m\\\vdots\\x_n^m\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \ldots + c_mx_0^m\\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \ldots + c_mx_1^m\\ \vdots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \ldots + c_mx_n^m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \ldots + c_mx_0^m = 0 \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \ldots + c_mx_1^m = 0 \\ \qquad\vdots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \ldots + c_mx_n^m = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

y si $q_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_mx^m$ con $m < n$ y **no todos los coeficientes nulos**, entonces el sistema (4.12) dice que la ecuación polinómica $q_m(x) = 0$ tiene por lo menos **n** raíces distintas $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(m < n)$, lo cual es imposible.

Así que $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$ y entonces las columnas de la matriz B son linealmente independientes, y usando el hecho de que **rango de B^TB = rango de B**, entonces la matriz $A = B^TB$ es invertible, lo que implica que el sistema de ecuaciones normales tiene solución única. De este modo se garantiza la existencia de un único polinomio de ajuste según mínimos cuadrados, si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son todos distintos. ∇

En el caso particular en que $m = 1$, $p_1(x) = a_0 + a_1x$ es **la recta de mínimos cuadrados** donde a_0 y a_1 se obtienen resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\boxed{\begin{cases} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^0\right)}_{n+1} a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^1\right) a_1 = \sum_{k=0}^{n} y_k \\[2ex] \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^1\right) a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right) a_1 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \end{cases}}$$

(No se recomienda usar la regla de Cramer para resolver el sistema anterior, porque la regla de Cramer es fuertemente inestable)

Una manera de medir el **error** para estimar la bondad del ajuste según mínimos cuadrados, es a través de:

i) El **error** $E = \sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2$, o

ii) El **error cuadrático medio** $E_{RMS} = \left(\dfrac{\sum_{k=0}^{n} \left(p_m(x_k) - y_k\right)^2}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Ejemplo 4.7 Dada la tabla siguiente

k	x_k	y_k
0	0	–1
1	2	0
2	3	2
3	5	1

TABLA 4.5

1) Encuentre:

a) La recta de mínimos cuadrados para la tabla y su error E y E_{RMS} .

b) La parábola de mínimos cuadrados para la misma tabla y su error E y E_{RMS} .

2) Cuál será el polinomio cúbico de mínimos cuadrados para dicha tabla? Cuál es su error E y E_{RMS} ?

Solución: Para dar respuesta a la pregunta **1)** debemos resolver dos sistemas de ecuaciones lineales:

Para la parte **a)** la recta es $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ donde a_0 y a_1 se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^0\right) a_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right) a_1 = \sum_{k=0}^{3} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right) a_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right) a_1 = \sum_{k=0}^{3} x_k y_l \end{cases} \qquad \textbf{(4.13)}$$

Para la parte **b)** la parábola es $p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ donde b_0, b_1 y b_2 se determinan resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^0\right) b_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right) b_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right) b_2 = \sum_{k=0}^{3} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^1\right) b_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right) b_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^3\right) b_2 = \sum_{k=0}^{3} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right) b_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^3\right) b_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^4\right) b_2 = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 y_k \end{cases} \quad \textbf{(4.14)}$$

Una manera conveniente de disponer todas las sumatorias necesarias para los dos sistemas es como se muestra en la siguiente tabla

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$
0	0	0	0	0	-1	0	0
1	2	4	8	16	0	0	0
2	3	9	27	81	2	6	18
3	5	25	125	625	1	5	25
$\sum_{k=0}^{3}$	10	38	160	722	2	11	43

TABLA 4.6

De modo que los sistemas **(**4.13) y (4.14) son

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 2 \\ 10a_0 + 38a_1 = 11 \end{cases} \quad \textbf{(4.13')}$$

$$\begin{cases} 4b_0 + 10b_1 + 38b_2 = 2 \\ 10b_0 + 38b_1 + 160b_2 = 11 \\ 38b_0 + 160b_1 + 722b_2 = 43 \end{cases} \quad \textbf{(4.14')}$$

La solución del sistema (4.13') es $a_0 = -\frac{17}{26}$, $a_1 = \frac{6}{13}$, y la solución del sistema (4.14') es $b_0 = -\frac{15}{13}$, $b_1 = \frac{101}{78}$ y $b_2 = -\frac{1}{6}$. Luego la recta de mínimos cuadrados para los datos dados es $p_1(x) = -\frac{17}{26} + \frac{6}{13}x$, y el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados para los datos dados es $p_2(x) = -\frac{15}{13} + \frac{101}{78}x - \frac{1}{6}x^2$.

La TABLA 4.7 siguiente, muestra los valores de $p_1(x_k)$ y $p_2(x_k)$, $k=0,1,2,3$, llamados **datos suavizados**, y las diferencias $y_k - p_1(x_k)$, $y_k - p_2(x_k)$.

x_k	0	2	3	5
y_k	-1	0	2	1
$p_1(x_k)$	$-.654$	$.269$	$.731$	1.65
$y_k - p_1(x_k)$	$-.346$	$-.269$	1.27	$-.65$
$p_2(x_k)$	-1.15	$.769$	1.23	1.15
$y_k - p_2(x_k)$	$.15$	$-.769$	$.77$	$-.15$

TABLA 4.7

El **error** para la recta de mínimos cuadrados es

$$E=\sum_{k=0}^{3}\left(p_1(x_k)-y_k\right)^2=(-.346)^2+(-.269)^2+(1.27)^2+(-.65)^2\approx 2.23$$

y el **error cuadrático medio** es

$$E_{RMS}=\left(\frac{\sum_{k=0}^{3}(p_1(x_k)-y_k)^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\left(\frac{2.23}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\approx .747$$

Análogamente, para la parábola de mínimos cuadrados se obtiene que

$$E=\sum_{k=0}^{3}(p_2(x_k)-y_k)^2\approx 1.23 \text{ y } E_{RMS}=\left(\frac{\sum_{k=0}^{3}(p_2(x_k)-y_k)^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\approx .555$$

Para la respuesta a la pregunta **2)**, recordemos que hay un único polinomio de grado menor o igual que tres que pasa por los cuatro puntos dados y es el polinomio de interpolación, así que el polinomio cúbico de mínimos cuadrados debe ser este polinomio. El polinomio de interpolación para los datos dados es

$$p_3(x)=-1.0-2.1x+\frac{11}{6}x^2-\frac{4}{15}x^3$$

que se puede obtener usando, por ejemplo, diferencias divididas. Es claro que el error $E=0$ y el error $E_{RMS}=0$.

Un dibujo de los puntos dados, la recta, la parábola y el polinomio cúbico según mínimos cuadrados, se muestra en la FIGURA 4.3 siguiente. ♦

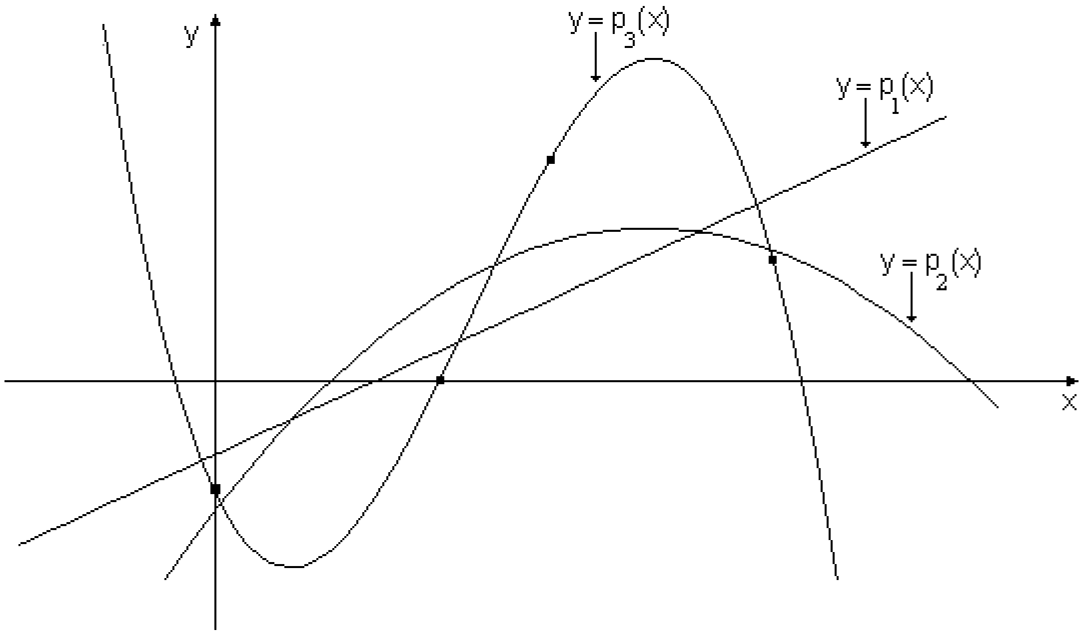

FIGURA 4.3

4.3.2 Regresión exponencial, logarítmica y de potencia: Aunque la regresión polinomial es la más usada, también hay casos de interés en los cuales la relación funcional entre las variables x y y es de alguno de los tipos siguientes:

$$y = a + b\ln x \quad \text{(Regresión logarítmica)} \tag{4.15}$$

$$y = ae^{bx} \quad \text{(Regresión exponencial)} \tag{4.16}$$

$$y = ax^{b} \quad \text{(Regresión de potencia)} \tag{4.17}$$

Estos problemas se tratan como un problema de ajuste lineal, así: En el caso (4.15), lineal entre las variables $\ln x$ e y; en el caso (4.16), como $y = ae^{bx} \Leftrightarrow \ln y = \ln a + bx$, se trata como un caso lineal entre las variables x y $\ln y$; en el caso (4.17), como $y = ax^{b} \Leftrightarrow \ln y = \ln a + b\ln x$, se trata como un caso lineal entre las variables $\ln x$ y $\ln y$.

Las soluciones para **a** y **b** en el caso (4.15), para **lna** y **b** en los casos (4.16) y (4.17), **pueden** encontrarse **modificando apropiadamente** las ecuaciones obtenidas en el caso de regresión lineal. Debe tenerse en cuenta que la aproximación obtenida de esta manera **no** es la aproximación de mínimos cuadrados del problema inicial y que, incluso, esta aproximación puede, en algunos casos, diferir significativamente de la aproximación de mínimos cuadrados del problema original.

Ejemplo 4.8 Encuentre la **recta logarítmica** $y = a + b\ln x$ para la siguiente tabla

k	x_k	y_k
0	29	1.6
1	50	23.5
2	74	38.0
3	103	46.4
4	118	48.9

TABLA 4.8

y úsela para estimar el valor de y cuando $x = 80$.

Solución: Para encontrar los valores de a y b, hacemos $z_k = \ln x_k$, $k = 0,1,2,3,4$, y resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 5a + \left(\sum_{k=0}^{4} z_k\right) b = \sum_{k=0}^{4} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{4} z_k\right) a + \left(\sum_{k=0}^{4} z_k^2\right) b = \sum_{k=0}^{4} z_k y_k \end{cases}$$

Para calcular los coeficientes a y b, modificamos los datos dados como se indica en la TABLA 4.9. Los **datos suavizados**, que aparecen en la última columna de la TABLA 4.9, se obtienen una vez que se conoce la recta logarítmica, que en este caso es

$$y = -111.123688 + 34.019025 \ln x$$

k	x_k	$z_k = \ln x_k$	z_k^2	y_k	$z_k y_k$	Datos suavizados
0	29	3.367296	11.338682	1.6	5.387674	3.428433
1	50	3.912023	15.303924	23.5	91.932541	21.959520
2	74	4.304065	18.524976	38.0	163.55447	35.29641
3	103	4.634729	21.480713	46.4	215.051426	46.545273
4	118	4.770685	22.759435	48.9	233.286497	51.170352
$\sum_{k=0}^{4}$	374	20.988798	89.40773	158.4	709.212608	$E_{RMS} \approx 1.907944$

TABLA 4.9

De acuerdo con la TABLA 4.9 el sistema a resolver es

$$\begin{cases} 5a + 20.988798b = 158.4 \\ 20.988798a + 89.40773b = 709.212608 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$a = -111.123688$$
$$b = 34.019025$$

así que la recta logarítmica es $y = -111.123688 + 34.019025\ln x$. Si $x = 80$, entonces $y = -111.123688 + 34.019025\ln 80 = 37.835394$. ♦

Ejercicio 4.4 Encuentre la curva $y = ae^{bx}$ usando mínimos cuadrados para la TABLA 4.10 siguiente. Úsela para calcular el valor de y cuando $x = 16$. Cuál es el error E?

x_k	6.9	12.9	19.8	26.7	35.1
y_k	21.4	15.7	12.1	8.5	5.2

TABLA 4.10

Ejercicio 4.5 Encuentre la curva $y = ax^b$ usando mínimos cuadrados para la TABLA 4.11 siguiente y úsela para calcular el valor de y cuando $x = 36$. Cuál es el error ?

x_k	28	30	33	35	38
y_k	–2410	–3033	–3895	–4491	–5717

TABLA 4.11

TALLER 4.

1. Use la forma de Lagrange del polinomio interpolante para encontrar los polinomios interpolantes más apropiados de grados uno, dos y tres para aproximar $f(.2)$, a partir de los siguientes datos

x	–.2	.1	.3	.7
$f(x)$	–.163746	.110517	.404958	1.40963

2. Use la forma de Lagrange del polinomio interpolante y todos los datos de la tabla siguiente, para aproximar $f(1.25)$. La función que se está aproximando es $f(x) = e^{x^2-1}$. Use esta información para encontrar una cota teórica para el error en esta aproximación.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.00000	1.23368	1.55271	1.99372	2.61170

3. Suponga que se desea construir una tabla de valores para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, en el dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, con tamaño de paso **h**. Si se usa interpolación lineal con cada dos datos consecutivos de la tabla, y suponemos que el error total, incluyendo el efecto de los errores de redondeo en las entradas de la tabla, es a lo más de 10^{-6}. Cuál es el valor más grande posible para **h**, y cuántas cifras decimales se deben usar para los datos de la tabla?

4. Demuestre que

$$\sum_{j=0}^{n} L_j(x) = 1 \quad \text{para toda } x$$

donde cada $L_j(x)$ es el polinomio fundamental de Lagrange de grado **n**, correspondiente a $n+1$ números $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Sugerencia: Considere la forma de Lagrange del polinomio interpolante de grado menor o igual que **n** para la función $f(x) \equiv 1$.

5. Sea $w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$. Demuestre que el polinomio interpolante de grado menor o igual que **n** para una función **f** en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, puede escribirse como

$$p_n(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k) w'(x_k)}$$

6. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $-5 \le x \le 5$, genere el polinomio interpolante $p_n(x)$ usando $n+1$ nodos **igualmente espaciados** en el intervalo $[-5,5]$. Calcule $p_n(x)$ para distintos valores de n y grafíquelos junto con la función f. Es cierto que $\underset{x \in [-5,5]}{\text{Max}} \left| f(x) - p_n(x) \right| \to 0$ cuando $n \to \infty$?

7. Encuentre un polinomio que tome los siguientes valores

x	1	2	0	3
y	3	2	–4	5

8. Encuentre las formas de Lagrange y de Newton del polinomio interpolante para los siguientes datos

x	–2	0	1
f(x)	0	1	–1

Escriba ambos polinomios en la forma $a + bx + cx^2$ para verificar que éllos son idénticos.

9. Use la forma deLagrange y la forma de Newton del polinomio interpolante para encontrar los polinomios interpolantes más apropiados de grado dos, para aproximar $f(.4)$ y $f(.6)$ a partir de los siguientes datos, y calcule la aproximación en cada caso

x	.1	.3	.5	.7	1.0
f(x)	11.052	4.4995	3.2974	2.8768	2.7183

10. Demuestre que si $(z_0, z_1, ..., z_n)$ es una permutación de $(x_0, x_1, ..., x_n)$, entonces $f[z_0, z_1, ..., z_n] = f[x_0, x_1, ..., x_n]$.

Sugerencia: Use la unicidad del polinomio interpolante.

11. Los siguientes datos son tomados de un polinomio de grado menor o igual que cinco. Cuál es dicho polinomio y cuál es su grado?

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	1	1	1	7	25

12. Verifique que el polinomio $p(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$ interpola los primeros cuatro puntos de la tabla siguiente:

x	–1	0	1	2	3
y	2	1	2	–7	10

Adicionando **únicamente un término** al polinomio $p(x)$, encuentre un polinomio que interpole la tabla completa.

13. Encuentre el polinomio de menor grado que pasa por los puntos $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,12)$ y $(7,146)$.

14. Un vehículo que viaja en una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos de las observaciones se dan en la siguiente tabla donde el tiempo está dado en segundos y la distancia en metros

Tiempo	0	3	5	8
Distancia	0	225	383	623

Encuentre el polinomio que interpola estos datos y úselo para aproximar la distancia, la velocidad y la aceleración del vehículo a los seis segundos.

15. Determine **todos** los valores de **a**, **b** y **c** tales que

$$T(x)=\begin{cases} 3+x-9x^3, & x\in[0,1] \\ a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, & x\in[1,2] \end{cases}$$

es un Trazador cúbico con nodos **0**, **1**, **2**.

Ahora, determine el valor de **d** tal que

$$\int_0^2 [T''(x)]^2 dx$$

sea mínima. Finalmente, encuentre el valor de **d** que haga de T un Trazador cúbico natural en $[0,2]$, y explique por qué este valor es distinto del obtenido previamente.

16. Determine si el Trazador cúbico natural que interpola la siguiente tabla

x_k	0	1	2	3
y_k	1	1	0	10

es o no la función

$$T(x)=\begin{cases} 1+x-x^3, & x\in[0,1] \\ 1-2(x-1)-3(x-1)^2+4(x-1)^3, & x\in[1,2] \\ 4(x-2)+9(x-2)^2-3(x-2)^3, & x\in[2,3] \end{cases}$$

17. Determine si la siguiente función es un Trazador cúbico natural

$$T(x)=\begin{cases} 2(x+1)+(x+1)^3, & x\in[-1,0] \\ 3+5x+3x^2, & x\in[0,1] \\ 11+11(x-1)+3(x-1)^2-(x-1)^3, & x\in[1,2] \end{cases}$$

18. Cuáles propiedades de un Trazador cúbico natural posee la siguiente función y cuáles no?

$$T(x)=\begin{cases} (x+1)+(x+1)^3, & x\in[-1,0] \\ 4+(x-1)+(x-1)^3, & x\in[0,1] \end{cases}$$

19. Determine los coeficientes **a**, **b**, **c** y **d** tales que la función

$$S(x)=\begin{cases} 1-2x, & x\in(-\infty,-3] \\ a+bx+cx^2+dx^3, & x\in[-3,4] \\ 157-32x, & x\in[4,+\infty) \end{cases}$$

es un Trazador cúbico natural para el intervalo $[-3,4]$.

20. Se pueden definir **a** y **b** de modo que la función

$$T(x)=\begin{cases} (x-2)^3+a(x-1)^2, & x\in(-\infty,2] \\ (x-2)^3-(x-3)^2, & x\in[2,3] \\ (x-3)^3+b(x-2)^2, & x\in[3,+\infty) \end{cases}$$

sea un Trazador cúbico natural en $(-\infty,+\infty)$? Por qué sí o por qué no?

21. Qué valores de **a**, **b**, **c** y **d** hacen de la siguiente función un Trazador cúbico?

$$T(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[-1,0] \\ a+bx+cx^2+dx^3, & x\in[0,1] \end{cases}$$

22. Construya la aproximación de mínimos cuadrados de la forma $y=ax^b$ para la siguiente tabla, y calcule su error E.

x_k	4.0	4.2	4.5	4.7
y_k	102.56	113.18	130.11	142.05

23. Encuentre la curva $y=ae^{bx}$ que mejor se ajusta según mínimos cuadrados a la siguiente tabla de datos y calcule su error E_{RMS}.

x_k	1.0	2.0	2.5	3.0
y_k	–11.08	–81.90	–222.6	–605.1