CAPÍTULO 5. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos algunos métodos numéricos para estimar el valor de una integral definida

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Integral en la cual el intervalo de integración $[a,b]$ es **finito**, y **f** es una función de una variable real y valor real **continua** en $[a,b]$.

Según el teorema fundamental del Cálculo, para una función f con las características indicadas antes, existe una antiderivada F de f en $[a,b]$, es decir, $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$, y

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

El problema para usar los métodos analíticos de integración es que, es posible que F no se pueda expresar en términos de funciones elementales, o aunque F se conozca explícitamente, ésta no se pueda evaluar fácilmente.

Ejemplos de tales integrales son:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^3}\,dx \qquad \int_0^1\frac{1}{1+x^5}dx \qquad \int_1^2\frac{e^x}{x}dx \qquad \int_1^5 e^{-x^2}dx$$

$$\int_1^2\frac{\ln x}{x+1}dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan x\,dx \qquad \int_2^3\frac{1}{\ln x}dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(x^2)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x^2)dx \qquad \int_0^1\sqrt[3]{1+x^3}\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{sen}x}\,dx \qquad \int_0^1\sqrt[3]{x+x^2}\,dx$$

$$\int_0^1(9-x^2)^{\frac{1}{3}}dx \qquad \int_0^1\sqrt{\tan x}\,dx \qquad \int_0^1\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx \qquad \int_0^{\pi}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$$

Lo anterior motiva el uso de los métodos de integración numérica que estudiaremos en lo que sigue; los primeros que consideraremos se basan en la aproximación de la función f mediante polinomios interpolantes.

5.1 ALGUNAS FÓRMULAS CERRADAS DE NEWTON-COTES

Supongamos que queremos estimar el valor de

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

donde la función f es continua en el intervalo finito $[a,b]$.

Una manera de hacer ésto se indica a continuación:

Empezamos dividiendo el intervalo $[a,b]$ en N subintervalos de igual longitud, $[x_0,x_1], [x_1,x_2],..., [x_k,x_{k+1}],..., [x_{N-1},x_N]$, donde los N+1 puntos $x_0, x_1,..., x_N$ de la partición se obtienen a partir de la fórmula

$$x_k = a + kh, \quad k = 0,1,...,N$$

siendo $h = \frac{b-a}{N}$. Nos referiremos a **h** como el **tamaño de paso**.

Nótese que $x_0 = a$, $x_N = b$, y que $h = x_{k+1} - x_k$, cualquiera sea $k = 0,1,..., N-1$.

Ahora bien, si $p_N(x) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)L_j(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange para la función f en los nodos $x_0, x_1,..., x_N$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_N(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{N} f(x_j)L_j(x)dx = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\int_a^b L_j(x)dx$$

De esta forma se obtiene una fórmula del tipo

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{N} A_j f(x_j)}$$

donde

$$A_j = \int_a^b L_j(x)dx, \quad j = 0,1,..., N$$

Una fórmula del tipo anterior, para aproximar el valor de $\int_a^b f(x)dx$, es llamada una **fórmula de cuadratura (cerrada) de Newton-Cotes**.

En muchos casos, en lugar de aproximar la función f en el intervalo completo $[a,b]$ por un sólo polinomio interpolante, usando todos los nodos $x_0, x_1,..., x_N$, más bien la aproximamos por tramos mediante polinomios interpolantes usando dos, tres o más nodos consecutivos. Estudiaremos solamente tres de estos últimos tipos de aproximaciones: La regla de los Trapecios, la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ y la regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$.

5.1.1 Regla de los Trapecios: Corresponde ésta al caso en que la función f se aproxima en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\dots,N-1$, mediante el polinomio de interpolación lineal de Lagrange, $p_k(x)$, usando los nodos x_k y x_{k+1}.

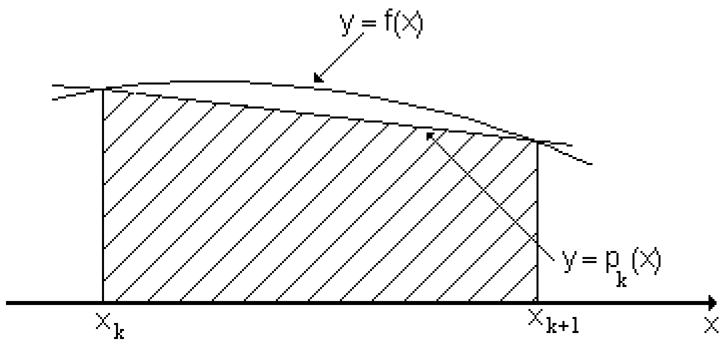


FIGURA 5.2

Como el polinomio de interpolación de Lagrange es

$$p_k(x) = f(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx &\approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)dx \\
&= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right] dx \\
&= f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx + f(x_{k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} dx \\
&= f(x_k)\frac{(x - x_{k+1})^2}{2(x_k - x_{k+1})} + f(x_{k+1})\frac{(x - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)} \Bigg]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= f(x_{k+1})\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)} - f(x_k)\frac{(x_k - x_{k+1})^2}{2(x_k - x_{k+1})} \\
&= \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\text{ancho}} \underbrace{\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}}_{\text{altura promedio}}
\end{aligned}$$

Pero $h = x_{k+1} - x_k$, así que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$$

y entonces

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$$

es decir,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right]}$$

Si $N > 1$, la fórmula anterior se conoce como **regla compuesta de los Trapecios**. En el caso $N = 1$, caso en el cual $h = b - a$, dicha fórmula se reduce a

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]}$$

fórmula que se conoce como **regla simple de los Trapecios**.

Algoritmo 5.1 (Regla de los Trapecios) Para aproximar la integral $I = \int_a^b f(x)dx$, usando la regla de los Trapecios:

Entrada: f(x) , los extremos a y b de la integral, un entero positivo N.

Salida: Una aproximación AI de I.

Paso 1: Tomar $h = \frac{b-a}{N}$.

Paso 2: Tomar $AIO = f(a) + f(b)$.

$AI = 0$ (Inicialización de la suma para los puntos x_k, $k = 1, 2, \ldots, N-1$)

Paso 3: Para $k = 1, 2, \ldots, N-1$, seguir los pasos 4 y 5:

Paso 4: Tomar $x = a + kh$

Paso 5: Tomar $AI = AI + f(x)$

Paso 6: Tomar $AI = \frac{h(AIO + 2AI)}{2}$.

Paso 7: Salida: "Un valor aproximado de la integral para N subintervalos es AI".
Terminar.

Error de fórmula en la regla de los Trapecios: Recordando la fórmula para el error en la interpolación, tenemos que si $p_k(x)$ es el polinomio de interpolación lineal de Lagrange para la función f en los nodos x_k y x_{k+1}, entonces para $x \in [x_k, x_{k+1}]$, el error al aproximar $f(x)$ mediante $p_k(x)$, es

$$E(x) = f(x) - p_k(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{2!} f''(\xi_k(x))$$

y entonces

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} E(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{2!} f''(\xi_k(x)) \right] dx$$

donde $\xi_k(x)$ es un número que depende de x y $\xi_k(x) \in (x_k, x_{k+1})$.

Luego el **error** en la aproximación obtenida al usar la regla de los Trapecios en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, que se denomina **error local**, es

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k(x))(x - x_k)(x - x_{k+1})dx$$

Como $g(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1})$ no cambia de signo en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, entonces por el **teorema del valor medio ponderado para integrales**, se tiene que

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k(x))(x - x_k)(x - x_{k+1})dx \\ &= \frac{f''(\xi_k)}{2} \left(\frac{x^3}{3} - (x_k + x_{k+1})\frac{x^2}{2} + x_k x_{k+1} x \Bigg]_{x_k}^{x_{k+1}} \right) \\ &= \frac{f''(\xi_k)}{2} \left(\frac{x_{k+1}^3 - x_k^3}{3} - (x_k + x_{k+1})\frac{(x_{k+1}^2 - x_k^2)}{2} + x_k x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \right) \end{aligned}$$

para algún $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$.

Factorizando, agrupando y teniendo en cuenta que $h = x_{k+1} - x_k$, obtenemos

$$\boxed{E_k = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_k)}$$

para algún $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$.

Teorema del valor medio ponderado para integrales: Si f es una función continua en $[a,b]$, g es una función integrable en $[a,b]$ y $g(x)$ **no** cambia de signo en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Cuando en el teorema anterior $g(x) \equiv 1$, éste se convierte en el teorema del valor medio para integrales. ∇

La demostración del teorema del valor medio ponderado para integrales puede ser consultada en Kincaid, 1972, páginas 12 y 13.

El **error total** al aplicar la regla de los Trapecios, es decir, el error que se comete al aplicar la regla de los Trapecios sobre todo el intervalo $[a,b]$, es

$$E_T = \sum_{k=0}^{N-1} E_k = \sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)\right) = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{N-1} f''(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

$$\overset{(*)}{=} -\frac{h^3}{12}Nf''(\xi) \underset{h=\frac{b-a}{N}}{\underset{\uparrow}{=}} -h^2\frac{b-a}{12}f''(\xi) \text{ para algún } \xi \in (a,b)$$

$(*)$ la igualdad se debe a la aplicación del teorema del valor intermedio a la función f'', que suponemos continua en el intervalo $[a,b]$.

La fórmula anterior del error en la regla de los Trapecios indica que si f es una función lineal, entonces la regla de los Trapecios es exacta, es decir, $E_k = 0$ para todo $k = 0,1,\ldots,N-1$, ya que si $f(x) = cx + d$, entonces $f'(x) \equiv c$ y $f''(x) \equiv 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Volviendo a la fórmula para el error total, E_T , tenemos que si

$$|f''(x)| \le L \text{ para toda } x \in [a,b]$$

entonces

$$|E_T| = \frac{h^3}{12}N|f''(\xi)| \le \frac{h^3}{12}NL = h^2\frac{(b-a)}{12}L \quad \left(\text{recuerde que } h = \frac{b-a}{N}\right)$$

El resultado anterior se indica escribiendo $E_T = O(h^2)$, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 5.1 (Notación O-grande) Supongamos que $\lim_{x\to 0} F(x) = L \in \mathbf{R}$. Se dice que $F(x)$ converge a L cuando $x \to 0$ con **rapidez de convergencia** $O(G(x))$, si existe una constante positiva K, independiente de x, tal que

$$\frac{|F(x)-L|}{|G(x)|} \leq K$$

para x suficientemente pequeño. Si este es el caso escribimos $F(x)=L+O(G(x))$. ∇

En el caso de la regla simple de los Trapecios, tenemos que $h=b-a$ y

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \text{ para algún } \xi \in (a,b)$$

así que $E_T = O(h^3)$, en este caso.

5.1.2 Regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$: En este caso se aproxima la función f en cada subintervalo $[x_k, x_{k+2}]$, $k=0,2,\ldots,N-2$, mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2}. Observe que, en este caso, el número de subintervalos N **debe ser par**, $N \geq 2$.

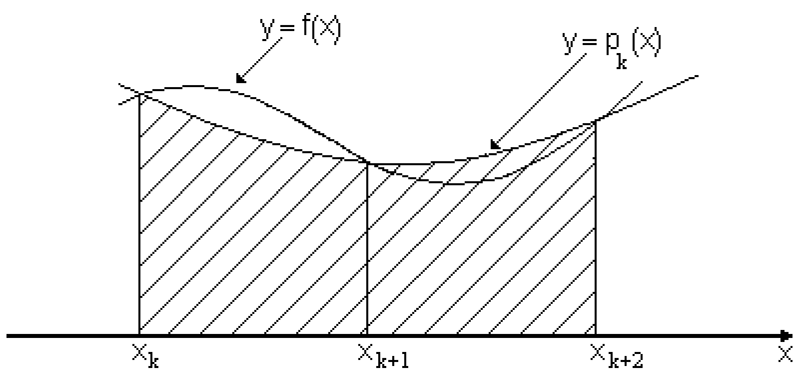


FIGURA 5.3

Como el polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos x_k, x_{k+1} y x_{k+2}, es

$$p_k(x) = f(x_k)\frac{(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{(x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})} + f(x_{k+1})\frac{(x-x_k)(x-x_{k+2})}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k+2})}$$
$$+f(x_{k+2})\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k+2}-x_k)(x_{k+2}-x_{k+1})}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx &\approx \int_{x_k}^{x_{k+2}} p_k(x)dx \\
&= \frac{f(x_k)}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})}\left(\frac{x^3}{3} - (x_{k+1} + x_{k+2})\frac{x^2}{2} + x_{k+1}x_{k+2}x\right) \\
&\quad + \frac{f(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})}\left(\frac{x^3}{3} - (x_k + x_{k+2})\frac{x^2}{2} + x_k x_{k+2}x\right) \\
&\quad \left. + \frac{f(x_{k+2})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})}\left(\frac{x^3}{3} - (x_k + x_{k+1})\frac{x^2}{2} + x_k x_{k+1}x\right)\right]_{x_k}^{x_{k+2}}
\end{aligned}$$

Evaluando, agrupando y teniendo en cuenta que $h = x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k-1}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx &\approx \underbrace{(x_{k+2} - x_k)}_{\text{ancho}}\underbrace{\frac{f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})}{6}}_{\text{altura promedio}} \\
&= 2h\frac{f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})}{6} \\
&= \frac{h}{3}\left[f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})\right]
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)dx \\
&\approx \frac{h}{3}\left\{\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \ldots + \left[f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\right]\right\}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right\}}$$

Si $N = 2m$, con m un entero, $m \geq 2$, la fórmula anterior se conoce como **regla compuesta de Simpson** $\left(\frac{1}{3}\right)$. Lo de $\frac{1}{3}$ viene de que en la fórmula obtenida, **h** aparece multiplicada por $\frac{1}{3}$.

En el caso particular $N = 2$, se tiene que $h = \frac{b-a}{2}$, y la fórmula anterior se reduce a

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$$

fórmula que se conoce como **regla simple de Simpson** $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Algoritmo 5.2 (Regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ **)** Para aproximar la integral $I=\int_a^b f(x)dx$, usando la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$:

Entrada: $f(x)$, los extremos a y b de la integral, un entero positivo par $N=2m$.

Salida: Una aproximación AI de I.

Paso 1: Tomar $h=\frac{b-a}{2m}=\frac{b-a}{N}$.

Paso 2: Tomar $AIO=f(a)+f(b)$

$AI1=0$ (Inicialización de la suma para los nodos x_{2k+1}, $k=0,1,\ldots,\frac{N-2}{2}=m-1$)

$AI2=0$ (Inicialización de la suma para los nodos x_{2k}, $k=1,2,\ldots,\frac{N-2}{2}=m-1$)

$AI=0$

Paso 3: Para $i=1,2,\ldots,2m-1$, seguir los pasos 4 y 5:

Paso 4: Tomar $x=a+ih$.

Paso 5: Si **i** es impar ($i=2k+1$), entonces tomar $AI1=AI1+f(x)$, de lo contrario $(i=2k)$ tomar $AI2=AI2+f(x)$.

Paso 6: Tomar $AI=\frac{h(AIO+4AI1+2AI2)}{3}$.

Paso 7: Salida: "Un valor aproximado de la integral para $N=2m$ subintervalos es AI". **Terminar**.

Error de fórmula en la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ **:** Como el término $(x-x_k)(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})$ que aparece en la formula de error al interpolar por un polinomio de interpolación de Lagrange (de grado menor o igual que 2) usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2} , cambia de signo en el intervalo $[x_k, x_{k+2}]$, no podemos obtener una fórmula para el error al aplicar la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ usando el teorema del valor medio ponderado para integrales; sin embargo se puede demostrar, ver Kincaid, 1972, páginas 447 y 448, que el error al emplear la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ en el intervalo $[x_k, x_{k+2}]$, llamado **error local**, está dada por

$$\boxed{E_k = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_k)}$$

donde $h = \frac{b-a}{N}$ y $\xi_k \in (x_k, x_{k+2})$, $k = 0, 2, ..., N-2$.

Entonces el error al aplicar la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ sobre todo el intervalo $[a,b]$, es decir, el **error total**, E_T , es

$$\boxed{\begin{aligned} E_T &= \sum_{k=0,2,..,N-2} E_k \overset{(*)}{=} \sum_{p=0}^{\frac{N-2}{2}} E_{2p} = \sum_{p=0}^{\frac{N-2}{2}} \left(-\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_{2p}) \right), \quad \xi_{2p} \in (x_{2p}, x_{2(p+1)}) \\ &= -\frac{h^5}{90} \sum_{p=0}^{\frac{N-2}{2}} f^{(iv)}(\xi_{2p}) = -\frac{h^5}{90} \left(\frac{N-2}{2} + 1 \right) f^{(iv)}(\xi) \\ &= -h^5 \left(\frac{N}{180} \right) f^{(iv)}(\xi) = -h^4 \frac{b-a}{180} f^{(iv)}(\xi), \quad \xi \in (a,b) \end{aligned}}$$

((*) La igualdad se debe al cambio de variable $k = 2p$: si $k = 0$, entonces $p = 0$, y si $k = N-2$, entonces $p = \frac{N-2}{2}$)

Esto implica que la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ es exacta cuando se aplica a polinomios de grado menor o igual que **3**, que es un grado más de lo que era de esperarse, ya que estamos aproximando la función f por medio de polinomios de grado menor o igual que dos.

Si $\left| f^{(iv)}(x) \right| \leq L$ para toda $x \in [a,b]$, entonces

$$\boxed{\left|E_T\right| = \frac{h^5}{90}\frac{N}{2}\left|f^{(iv)}(\xi)\right| \le \frac{h^5}{180}NL = h^4\,\frac{b-a}{180}L}$$

así que $E_T = O\left(h^4\right)$.

En el caso $N = 2$,

$$\boxed{E_T = -\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(iv)}(\xi),\quad \text{con}\quad \xi \in (a,b)}$$

(recuerde que $h = \dfrac{b-a}{N}$), así que $E_T = O\left(h^5\right)$.

5.1.3 Regla de Simpson $\left(\dfrac{3}{8}\right)$: De la misma forma que se obtuvieron las regla de los Trapecios y la regla de Simpson $\left(\dfrac{1}{3}\right)$, se puede interpolar la función f en cada subintervalo $[x_k, x_{k+3}]$, $k = 0,3,...,N-3$ (lo que requiere que N sea un entero positivo múltiplo de **3**, es decir, $N = 3m$, m un entero positivo), mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que tres, $p_k(x)$, usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3} .

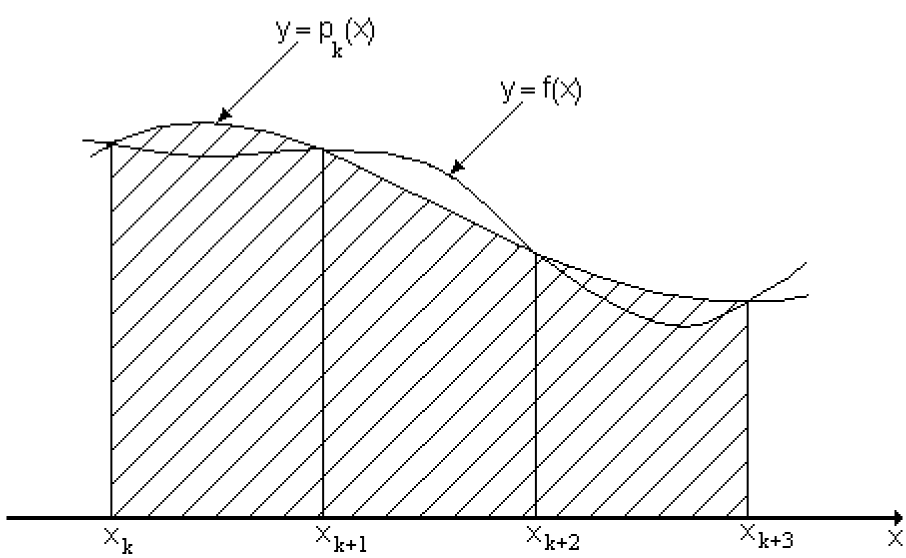


FIGURA 5.4

Entonces

$$\int_{x_k}^{x_{k+3}} f(x)dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+3}} p_k(x)dx$$

y se obtiene

$$\int_{x_k}^{x_{k+3}} f(x)dx \approx \underbrace{(x_{k+3} - x_k)}_{\text{ancho}} \underbrace{\frac{f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})}{8}}_{\text{altura promedio}}$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})\right]$$

Así que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{N-3}}^{x_N} f(x)dx$$

$$\approx \frac{3h}{8}\Big\{ \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] + \left[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)\right] + \ldots$$
$$+ \left[f(x_{N-3}) + 3f(x_{N-2}) + 3f(x_{N-1}) + f(x_N)\right] \Big\}$$

es decir,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left\{f(a) + f(b) + 3\sum_{k=0}^{\frac{N-3}{3}} f(x_{3k+1}) + 3\sum_{k=0}^{\frac{N-3}{3}} f(x_{3k+2}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-3}{3}} f(x_{3k})\right\}}$$

Si $N = 3m,\ m \geq 2,\ m$ un entero, la fórmula anterior se conoce como **regla compuesta de Simpson** $\left(\frac{3}{8}\right)$.

En el caso $N = 3$, caso en el cual $h = \frac{b-a}{3}$, dicha fórmula se reduce a

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{3(b-a)}{24}\left\{f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right\} \\ &= \frac{b-a}{8}\left\{f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right\} \end{aligned}}$$

fórmula que se conoce como **regla simple de Simpson** $\left(\frac{3}{8}\right)$.

Al igual que en el caso de la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$, se puede demostrar que el **error** al aproximar el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ por medio de la regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$ en el intervalo $[x_k, x_{k+3}]$, es decir, el **error local**, es

$$E_k = -\frac{3}{80}h^5 f^{(iv)}(\xi_k), \quad h = \frac{b-a}{N}, \; \xi_k \in (x_k, x_{k+3}), \quad k = 0, 3, \ldots, N-3$$

y entonces el **error total** es

$$\boxed{\begin{aligned} E_T &= -\frac{3}{80}h^5 \sum_{p=0}^{\frac{N-3}{3}} f^{(iv)}(\xi_{3p}) = -\frac{3}{80}h^5\left(\frac{N-3}{3}+1\right)f^{(iv)}(\xi) \\ &= -h^5\frac{N}{80}f^{(iv)}(\xi) = -h^4\frac{b-a}{80}f^{(iv)}(\xi) \quad \text{para algú n}\, \xi \in (a,b) \end{aligned}}$$

Si $\left| f^{(iv)}(x) \right| \le L$ para toda $x \in [a,b]$, entonces

$$| E_T | = h^4\frac{b-a}{80}\left| f^{(iv)}(\xi) \right| \le h^4\frac{b-a}{80}L$$

así que $E_T = O(h^4)$, como en la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Si $N = 3$, entonces $h = \frac{b-a}{3}$ y

$$\boxed{\begin{aligned} E_T &= -\frac{3}{80}h^5 f^{(iv)}(\xi) \\ &= -\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 f^{(iv)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(iv)}(\xi) \quad \text{para algú n}\, \xi \in (a,b) \end{aligned}}$$

así que $E_T = O(h^5)$, en este caso.

Ejemplo 5.1 Use las reglas de los Trapecios, Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ y Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$ simples y compuestas con $N = 6$, para estimar

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

Cuál es una cota para el error en la estimación, en cada caso ? (desprecie los errores de redondeo)

Solución: En este ejemplo $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, que es una función continua en todo $\mathbf{R}$, por tanto se satisfacen todas las hipótesis para que se puedan aplicar las reglas de integración numéricas vistas.

CASO SIMPLE: En este caso $N=1$ para la regla de los Trapecios, $N=2$ para la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ y $N=3$ para la regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$.

i) Según la **regla de los Trapecios:**

$$\begin{aligned} I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx &\approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ &= \frac{\pi}{6}\left[\operatorname{sen}^2 0+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= .3926991 \end{aligned}$$

ii) Según la r**egla de Simpson** $\left(\frac{1}{3}\right)$**:**

$$\begin{aligned} I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx &\approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{\pi}{18}\left[\operatorname{sen}^2(0)+4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= .3054326 \end{aligned}$$

iii) Según la **regla de Simpson** $\left(\frac{3}{8}\right)$**:**

$$\begin{aligned} I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx &\approx \frac{3(b-a)}{24}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right] \\ &= \frac{\pi}{24}\left[\operatorname{sen}^2(0)+3\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+3\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= .3063656 \end{aligned}$$

Cuál de estas aproximaciones es la mejor ?

Estudiemos el error para cada caso.

i) Regla de los Trapecios: En este caso

$$E_T=-\frac{h^3}{12}f''(\xi) \text{ con } \xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right),\ \ h=b-a=\frac{\pi}{3}$$

Como $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$, entonces

$$f'(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}(2x), \quad f''(x) = 2\cos(2x)$$
$$\left(f'''(x) = -4\,\mathrm{sen}(2x), \;\; f^{(iv)}(x) = -8\cos(2x) \right)$$

luego

$$\left| f''(x) \right| = \left| 2\cos(2x) \right| < 2 \;\; \text{para todo} \;\; x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

y entonces

$$\left| E_T \right| = \frac{h^3}{12} \left| f''(\xi) \right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{12} 2 \approx .19 < .5 = 5 \times 10^{-1}$$

lo que no garantiza que el valor obtenido aproxime al valor exacto con alguna cifra decimal exacta.

ii) Regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$: En este caso

$$E_T = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi) \;\; \text{para algún} \;\; \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad h = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi}{6}$$

y como

$$\left| f^{(iv)}(x) \right| = \left| -8\cos(2x) \right| < 8 \;\; \text{para todo} \;\; x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

entonces

$$\left| E_T \right| = \frac{h^5}{90} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{90} 8 \approx 3.5 \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-3}$$

lo que asegura una precisión de por lo menos dos cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla simple de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$.

iii) Regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$: En este caso

$$E_T = -\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi) \;\; \text{para algún} \;\; \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad h = \frac{b-a}{3} = \frac{\pi}{9}$$

entonces

$$\left| E_T \right| = \frac{3h^5}{80} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| \le \frac{3\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{80} 8 \approx 1.6 \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-3}$$

lo que garantiza una precisión de por lo menos dos cifras decimales exactas en la aproximación obtenida usando la regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$.

Según estas estimaciones de error, se espera que la mejor aproximación sea la obtenida por la regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$, pero para dar una respuesta definitiva debemos conocer el valor exacto de la integral dada.

CASO COMPUESTO CON $N=6$ **:** Si $N=6$, entonces $h=\frac{b-a}{N}=\frac{\pi}{18}$ y los puntos de la partición son

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{\pi}{18},\quad x_2=\frac{\pi}{9},\quad x_3=\frac{\pi}{6},\quad x_4=\frac{2\pi}{9},\quad x_5=\frac{5\pi}{18},\quad x_6=\frac{\pi}{3}$$

Entonces tenemos:

i) Regla de los Trapecios: Según esta regla

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{sen}^2 x dx\approx\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{5}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$
$$=\frac{\pi}{36}\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+2\left[f\left(\frac{\pi}{18}\right)+f\left(\frac{\pi}{9}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{2\pi}{9}\right)+f\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right]\right\}$$
$$=\ .3092953$$

En este caso el error es

$$E_T=-\frac{h^3}{12}Nf''(\xi)=-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{12}6f''(\xi)\quad \text{para algú n}\ \xi\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$$

y como

$$\left|f''(x)\right|\le 2\quad \text{para toda}\ x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$$

entonces

$$\left|E_T\right|\le\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{12}(6)(2)=\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\approx 5.3\times10^{-3}<5\times10^{-2}$$

lo que garantiza una precisión de por lo menos una cifra decimal exacta en la aproximación calculada.

ii) Regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$**:** Según esta regla

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{sen}^2 x dx\approx\frac{h}{3}\sum_{k=0,2,4}\left[f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})\right]$$
$$=\frac{h}{3}\left\{f(x_0)+f(x_6)+4\left[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)\right]+2\left[f(x_2)+f(x_4)\right]\right\}$$
$$=\ .3070743$$

El error en la aproximación es

$$E_T = -\frac{h^5}{180} N f^{(iv)}(\xi) = -\frac{h^5}{180} 6 f^{(iv)}(\xi) = -\frac{h^5}{30} f^{(iv)}(\xi) \quad \text{para algún} \quad \xi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

y como

$$h = \frac{\pi}{18} \ \text{ y } \ \left| f^{(iv)}(x) \right| \leq 8 \quad \text{para toda} \ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

entonces

$$|E_T| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{30} 8 \approx 4.3 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}$$

lo que garantiza una precisión de por lo menos cuatro cifras decimales exactas en la aproximación calculada.

iii) Regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$: En este caso

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx \approx \frac{3h}{8} \sum_{k=0,3} \left[f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3}) \right]$$

$$= \frac{3h}{8} \left\{ f(x_0) + f(x_6) + 3\left[f(x_1) + f(x_4)\right] + 3\left[f(x_2) + f(x_5)\right] + 2f(x_3) \right\}$$

$$= .3070510$$

El error en la aproximación para este caso es

$$E_T = -\frac{h^5}{80} N f^{(iv)}(\xi) = -\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{80} 6 f^{(iv)}(\xi) \quad \text{para algún} \quad \xi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

y entonces

$$|E_T| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{80} (6)(8) \approx 9.7 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-4}$$

lo que garantiza una precisión de por lo menos tres cifras decimales exactas en la aproximación calculada.

De estas tres ultimas aproximaciones, se espera que la mejor sea la dada por la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$, que es la que tiene menor cota de error.

Como el valor exacto de $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} = .307092424\ldots$, entonces el error absoluto real en las aproximaciones obtenidas, para el caso de las reglas compuestas, es:

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx - .3092953\right| = 2.1\ldots\times 10^{-3}$$, para la regla de los Trapecios.

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx - .3070743\right| = 1.8\ldots\times 10^{-5}$$, para la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx - .3070510\right| = 4.1\ldots\times 10^{-5}$$, para la regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$.

Instrucciones en DERIVE:

TRAPECIO($f(x), x, a, b, N$): Usa la regla de los Trapecios con N subintervalos para apro**X**imar el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$.

SIMPSON($f(x), x, a, b, N$): Usa la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ con N subintervalos (N debe ser un entero positivo PAR) para apro**X**imar el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$.

Para el ejemplo anterior, apro**X**ime las expresiones TRAPECIO($(\sin x)^2, x, 0, \frac{\pi}{3}, 6$); SIMPSON($(\sin x)^2, x, 0, \frac{\pi}{3}, 6$). ◊

Los valores obtenidos por las reglas de los Trapecios, Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ y Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$, para valores de $N = 12,\ 18,\ 24$ y 36 se muestran en la TABLA 5.1 siguiente.

N	Regla de los Trapecios	Regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$	Regla de Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$
6	.3092953	.3070743	.3070510
12	.3076423	.3070913	.3070899
18	.3073367	.3070922	.3070919
24	.3072298	.3070924	.3070923
36	.3071535	.3070924	.3070924

TABLA 5.1

Se recomienda usar la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ con $h \approx .05$. Si el número de subintervalos es impar se pueden combinar las reglas de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ y Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$, mejor que usar la regla de los Trapecios.

Para el ejemplo, observe que si $N = 18$, entonces

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{18} = \frac{\pi}{54} \approx .058 \quad \blacklozenge$$

Una **propiedad muy importante** de las fórmulas de integración (cerradas) de Newton-Cotes es la **estabilidad** con respecto a los errores de redondeo.

Por ejemplo, supongamos que aplicamos la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ con $N = 2m$ subintervalos a una función f en $[a,b]$, y determinemos una cota para el error de redondeo acumulado ocasionado por la aplicación de dicha regla.

Si el valor calculado de $f(x_k)$ se nota por $\tilde{f}(x_k)$, es decir,

$$f(x_k) = \tilde{f}(x_k) + \in_k, \text{ para } k = 0,1,\ldots,N = 2m$$

donde $\in_k$ denota el **error de redondeo** correspondiente a $f(x_k)$, entonces al aplicar la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ a la función f debemos calcular la expresión

$$\frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_{2m}) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})\right]$$

Por lo tanto el **error de redondeo acumulado** E_R, al usar la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$, es

$$E_R = \frac{h}{3}\left[\in_0 + \in_{2m} + 4\sum_{k=0}^{m-1} \in_{2k+1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} \in_{2k}\right]$$

así que

$$|E_R| = \left|\frac{h}{3}\left[\in_0 + \in_{2m} + 4\sum_{k=0}^{m-1} \in_{2k+1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} \in_{2k}\right]\right|$$

y entonces

$$|E_R| \le \frac{h}{3}\left\{|\in_0| + 4\sum_{k=0}^{m-1} |\in_{2k+1}| + 2\sum_{k=1}^{m-1} |\in_{2k}| + |\in_{2m}|\right\}$$

Ahora bien, si los errores de redondeo están acotados uniformemente por $\in$, es decir $|\in_k| \leq \in$ para todo $k = 0, 1, \ldots, N = 2m$, entonces

$$|E_R| \leq \frac{h}{3}[\in + 4m \in + 2(m-1) \in + \in] = \frac{h}{3} 6m \in = 2mh \in$$

pero $h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2m}$, así que $2mh = b - a$, y por lo tanto

$$|E_R| \leq (b-a) \in$$

Luego una cota para el valor de E_R es $(b-a)\in$, que es una cota independiente de **h**, lo que implica que el procedimiento de la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ es **estable** cuando **h** tiende a cero. ∇

Ejemplo 5.2 Use la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ con $N = 6$ para estimar la longitud **L** del arco de la curva $y = \cos x$ comprendida entre los puntos $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Solución: Como $y = \cos x$, $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$, entonces

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx \qquad \text{(\textbf{Integral elíptica} de segunda clase)}$$

Es claro que la función $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2 x}$ es continua en el intervalo finito $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Así que podemos aplicar la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ para aproximar el valor de L. Si $N = 6$, entonces $h = \frac{b-a}{N} = \frac{\pi}{6}$, y entonces los puntos x_k de la partición y los valores $f(x_k) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x_k)}$ correspondientes, son los que se dan en la TABLA 5.2 siguiente:

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_k)$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\sqrt{2}$

TABLA 5.2

Por consiguiente

$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx\approx\frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_6)+4\sum_{k=0}^{2}f(x_{2k+1})+2\sum_{k=1}^{2}f(x_{2k})\right]$$

$$=\frac{\pi}{18}\left[\sqrt{2}+\sqrt{2}+4\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$=3.819403$$

De acuerdo con la fórmula de error en la aplicación de la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$, se tiene que

$$|\,E_T\,|\le h^4\,\frac{b-a}{180}M=\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\frac{\pi}{180}M$$

siendo M una constante tal que $\left|f^{(iv)}(x)\right|\le M$ para toda $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Se puede verificar que el menor valor para M es **7**, así que

$$|\,E_T\,|\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\frac{\pi}{180}7\approx\ .009\le 5\times 10^{-2}$$

lo que asegura una precisión de por lo menos una cifra decimal exacta en la aproximación obtenida. En situaciones como la del ejemplo, donde la función $f(x)=\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$ tiene derivada difícil de calcular, podemos estimar el error teniendo en cuenta que

$$E_T=O\left(h^4\right)\approx\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\approx .075<\ .5=5\times 10^{-1}$$

Si $N=60$, entonces $h=\frac{\pi}{60}\approx\ .05$ y la aproximación obtenida es $L\approx 3.820198$ con $|\,E_T\,|\le 9.1\times 10^{-7}\le 5\times 10^{-6}$, lo que asegura una precisión de por lo menos cinco cifras decimales exactas en la aproximación obtenida. ♦

Ejemplo 5.3 Determine los valores de **N** y **h** necesarios (de acuerdo con la teoría) para aproximar

$$\int_1^3 e^x \operatorname{sen}x\,dx$$

de manera que el error en la aplicación de la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ no sea mayor que 10^{-4} y determine la aproximación (desprecie los errores de redondeo).

Solución: Sabemos que el error en la aplicación de la regla compuesta de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ es

$$E_T = -\frac{h^5}{90}\frac{N}{2}f^{(iv)}(\xi)\ , \quad \text{donde} \quad \xi \in (1,3) \quad \text{y} \quad h = \frac{b-a}{N} = \frac{2}{N}$$

De acuerdo con esta fórmula, debemos empezar por conocer una cota para $f^{(iv)}(x)$ en el intervalo $[1,3]$, siendo $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

Como

$$f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$f''(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x$$

$$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

y

$$f^{(iv)}(x) = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + 2e^x(-\operatorname{sen} x - \cos x) = 2e^x(-2\operatorname{sen} x) = -4e^x \operatorname{sen} x$$

entonces $f^{(v)}(x) = -4e^x \operatorname{sen} x - 4e^x \cos x = -4e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$, así que

$$f^{(v)}(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x$$
$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \approx 2.356 \in [1,3]$$

Ahora,

$$f^{(iv)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4e^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -29.84\ldots$$

$$f^{(iv)}(1) = -4e^1 \operatorname{sen} 1 = -9.149\ldots$$

$$f^{(iv)}(3) = -4e^3 \operatorname{sen} 3 = -11.33\ldots$$

luego en $x = \frac{3\pi}{4}$ ocurre el mínimo de $f^{(iv)}(x) = -4e^x \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[1,3]$, pero $f^{(iv)}(x) = -4e^x \operatorname{sen} x < 0$ para toda $x \in [1,3]$, así que el máximo de $\left| f^{(iv)}(x) \right|$ en el intervalo $[1,3]$ ocurre en $x = \frac{3\pi}{4}$, es decir,

$$\left| f^{(iv)}(x) \right| = 4e^x \operatorname{sen} x \le 4e^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx 29.84 < 30 \quad \text{para todo} \quad x \in [1,3]$$

Así que finalmente,

$$\mid E_T \mid \le \frac{h^5}{180} N(30) = \frac{\left(\frac{2}{N}\right)^5}{6} N$$

y entonces debemos encontrar N, tal que $\frac{32}{6N^4} \le 10^{-4}$. La solución de esta desigualdad es $N > 15$ y como N debe ser par, entonces el menor valor de N es $N = 16$.

Si $N = 16$, entonces $h = \frac{2}{16} = .125$ y la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ da

$$\int_1^3 e^x \operatorname{sen} x dx \approx 10.95011$$

Como $\mid E_T \mid \le 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$, entonces (despreciando los errores de redondeo) la aproximación calculada tiene una precisión de por lo menos tres cifras decimales exactas, que son **9**,**5** y **0**.

Si integramos por partes, obtenemos $\int_1^3 e^x \operatorname{sen} x dx = 10.95017\ldots$, así que la aproximación calculada es bastante buena. ♦

5.2 INTEGRACIÓN DE ROMBERG

La integración de Romberg es un método numérico para obtener una estimación del valor de una integral definida con base en dos o más aplicaciones de una fórmula como la de los Trapecios (o Simpson) empleando diferentes tamaños de paso, pero que es mejorada al combinarse con el proceso de extrapolación de Richardson. Para estudiar la extrapolación de Richardson se puede consultar Burden, 1985, páginas 167-173.

El procedimiento de Romberg para aproximar $\int_a^b f(x)dx$, consiste en lo siguiente:

Aplicamos la regla de los Trapecios sucesivamente para tamaños de paso h_k variables, así:

$h_1 = b - a$ $(m_1 = 1$ subintervalo$)$, $h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{b-a}{2}$ ($m_2 = 2$ subintervalos), $h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{b-a}{2^2}$ $(m_3 = 2^2$ subintervalos$)$,..., $h_k = \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ ($m_k = 2^{k-1}$ subintervalos), ..., $h_N = \frac{h_{N-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{N-1}}$ ($m_N = 2^{N-1}$ subintervalos) donde N es algún entero positivo.

Al reemplazar h por h_k en la regla de los Trapecios, obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a+ih_k)\right] - \frac{h_k^3}{12}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} f''(\xi_i)$$

donde ξ_i es tal que $a+ih_k < \xi_i < a+(i+1)h_k$.

Si denotamos

$$R_{k,1} = \frac{h_k}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a+ih_k)\right]$$

entonces al variar $k = 1,2,...,N$, obtenemos las aproximaciones mediante la regla de los Trapecios

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}\left[f(a)+f(b)\right] = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$\begin{aligned} R_{2,1} &= \frac{h_2}{2}\left[f(a)+f(b)+2f(a+h_2)\right] \\ &= \frac{b-a}{4}\left[f(a)+f(b)+2f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+(b-a)f\left(a+\frac{1}{2}(b-a)\right)\right\} \end{aligned}$$

es decir,

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1}+h_1 f\left(a+\frac{1}{2}h_1\right)\right]$$

Ahora,

$$\begin{aligned} R_{3,1} &= \frac{h_3}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{3} f(a+ih_3)\right] \\ &= \frac{h_3}{2}\left\{f(a)+f(b)+2\left[f(a+h_3)+f(a+2h_3)+f(a+3h_3)\right]\right\} \\ &= \frac{b-a}{8}\left\{f(a)+f(b)+2\left[f\left(a+\frac{b-a}{4}\right)+f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)+f\left(a+\frac{3(b-a)}{4}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{b-a}{4}\left\{f(a)+f(b)+2f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right\}+\frac{b-a}{2}\left\{f\left(a+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)+f\left(a+\frac{3}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)\right\}\right\} \end{aligned}$$

es decir,

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left\{R_{2,1}+h_2\left[f\left(a+\frac{h_2}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h_2}{2}\right)\right]\right\}$$

En general, se puede demostrar que

$$R_{k,1}=\frac{1}{2}\left\{R_{k-1,1}+h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}}f\left(a+\left(\frac{2i-1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right\},\quad k=2,3,\ldots,N$$

Para ilustrar esta primera parte del procedimiento, aproximemos la integral

$$\int_1^3\frac{1}{x}dx=\ln 3\ \ (=1.0986128\ldots)$$

mediante los números de Romberg $R_{k,1}$ con $k = 1,\ 2,\ 3\ \ (N = 3)$:

$$R_{1,1}=\frac{3-1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right]=\frac{4}{3}\approx 1.333333$$

$$R_{2,1}=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}+(3-1)\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{7}{6}\approx 1.166667$$

$$R_{3,1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{7}{6}+\frac{3-1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right]\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{7}{6}+\frac{16}{15}\right\}=\frac{1}{2}\ \frac{67}{30}=\frac{67}{60}\approx 1.116667$$

Se observa que las aproximaciones $R_{k,1}$ van acercándose al valor exacto de la integral, pero con lentitud. Para **acelerar la convergencia**, usamos ahora extrapolación de Richardson y un resultado que nos muestra otra forma para el error en la aplicación de la fórmula de los Trapecios:

$$\int_a^b f(x)dx=\underbrace{\frac{h_k}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1}f(a+ih_k)\right]}_{R_{k,1}}\underbrace{-\frac{h_k^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]+\frac{(b-a)h_k^4}{720}f^{(iv)}(\xi_k)}_{\text{error}}$$

para algún ξ_k con $a<\xi_k<b$, $k=1,2,\ldots,N$.

Combinando la ecuación

$$\int_a^b f(x)dx=R_{k-1,1}-\frac{h_{k-1}^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]+\frac{(b-a)h_{k-1}^4}{720}f^{(iv)}(\xi_{k-1})$$

con la ecuación

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=R_{k,1}-\frac{h_k^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]+\frac{(b-a)h_k^4}{720}f^{(iv)}(\xi_k)\\&=R_{k,1}-\frac{h_{k-1}^2}{48}\left[f'(b)-f'(a)\right]+\frac{(b-a)h_k^4}{720}f^{(iv)}(\xi_k),\quad \text{ya que } h_k=\frac{h_{k-1}}{2}\end{aligned}$$

o sea con la ecuación

$$4\int_a^b f(x)dx = 4R_{k,1} - \frac{h_{k-1}^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right] + \frac{4(b-a)h_k^4}{720} f^{(iv)}(\xi_k)$$

podemos eliminar el término que contiene a $f'(b) - f'(a)$, para obtener

$$3\int_a^b f(x)dx = 4R_{k,1} - R_{k-1,1} + \frac{b-a}{720}\left[4h_k^4 f^{(iv)}(\xi_k) - h_{k-1}^4 f^{(iv)}(\xi_{k-1})\right]$$

Luego

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} + \frac{b-a}{2160}\left[4h_k^4 f^{(iv)}(\xi_k) - h_{k-1}^4 f^{(iv)}(\xi_{k-1})\right]$$

$$= \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} + \frac{b-a}{2160}\left[4h_k^4 f^{(iv)}(\xi_k) - 16h_k^4 f^{(iv)}(\xi_{k-1})\right], \text{ ya que } h_{k-1} = 2h_k \ .$$

$$= \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} + h_k^4 \frac{b-a}{540}\left[f^{(iv)}(\xi_k) - 4f^{(iv)}(\xi_{k-1})\right]$$

y asumiendo que $f^{(iv)}$ está acotada en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} + O(h_k^4), \quad k = 2,3,\ldots,N$$

Para continuar con el procedimiento de Romberg, **definimos**:

$$R_{k,2} = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} \quad \text{para } k = 2,3,\ldots,N$$

Se puede demostrar que las aproximaciones $R_{k,2}$, $k = 2,3,\ldots,N$ corresponden a las aproximaciones obtenidas por la Regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ con $h = h_k$.

Para el ejemplo, tenemos

$$R_{2,2} = \frac{4R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = \frac{4\left(\frac{7}{6}\right) - \frac{4}{3}}{3} = \frac{10}{9} \approx 1.1111111$$

$$R_{3,2} = \frac{4R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = \frac{4\left(\frac{67}{60}\right) - \frac{7}{6}}{3} = \frac{198}{180} = 1.100000$$

Aplicando sucesivamente el proceso de extrapolación de Richardson, obtenemos

$$\boxed{R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1} \quad \text{para cada } i = 1,2,...,N \text{ y } j = 2,...,i}$$

con error asociado de orden $O\left(h_i^{2j}\right)$.

Recuerde que

$$\boxed{R_{k,1} = \frac{1}{2}\left\{R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(\frac{2i-1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right\}, \quad k = 2,3,...,N}$$

y que

$$\boxed{R_{1,1} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]}$$

El orden en que se calculan los $R_{i,j}$ es (por filas):

$$\begin{array}{ccccccccc}
R_{1,1} & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
R_{2,1} & \rightarrow & R_{2,2} & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
R_{3,1} & \rightarrow & R_{3,2} & \rightarrow & R_{3,3} & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
R_{N,1} & \rightarrow & R_{N,2} & \rightarrow & R_{N,3} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & R_{N,N}
\end{array}$$

donde para calcular $R_{2,2}$ necesitamos conocer $R_{1,1}$ y $R_{2,1}$; para calcular $R_{3,2}$ necesitamos conocer $R_{2,1}$ y $R_{3,1}$; para calcular $R_{3,3}$ necesitamos conocer $R_{2,2}$ y $R_{3,2}$; etc. Así que el uso mas eficiente de esta tabla se logra realizando los cálculos por filas de modo que con aplicar una sola vez más la regla de los Trapecios (para calcular $R_{k,1}$) se pueda calcular la siguiente fila.

Es decir, el orden en que se calculan los elementos es $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{2,2}$, $R_{3,1}$, $R_{3,2}$, $R_{3,3}$,... .

Se puede demostrar, ver Ralston, 1965, páginas 121-124, que los términos de la diagonal convergen al valor exacto de la integral siempre y cuando los valores $R_{k,1}$ converjan a este número. Se espera, en general, que la sucesión $\left\{R_{k,k}\right\}_k$ converja mucho más rápido que la sucesión $\left\{R_{k,1}\right\}_k$.

El procedimiento de Romberg se termina cuando, prefijada alguna tolerancia $\varepsilon > 0$, se satisfaga que $\left|R_{k,k-1} - R_{k,k}\right| < \varepsilon$ y se toma $R_{k,k}$ como la aproximación al valor de la integral.

Para el ejemplo, tenemos:

$$R_{3,3} = \frac{4^{3-1}R_{3,2} - R_{2,2}}{4^{3-1} - 1} = \frac{16\left(\frac{198}{180}\right) - \frac{10}{9}}{15} = \frac{\frac{176}{10} - \frac{10}{9}}{15} = \frac{1584 - 100}{1350} = \frac{1484}{1350} \approx 1.099259$$

con

$$\left| R_{3,2} - R_{3,3} \right| = .000741 < .005 = 5 \times 10^{-3}$$

Como

$$\left| R_{3,3} - \int_1^3 \frac{1}{x} dx \right| \approx .000647 < .005 = 5 \times 10^{-3}$$

entonces el valor calculado $R_{3,3} = 1.099259$, aproxima al valor exacto de la integral con una precisión de dos cifras decimales exactas (0 y 9) .

Algoritmo 5.3 (Método de Romberg) Para encontrar un valor aproximado de $I = \int_a^b f(x)dx$ usando el método de integración de Romberg:

Entrada: $f(x)$, los extremos **a** y **b**, y un entero positivo **N**.

Salida: Los números de Romberg $R_{1,1},\ R_{2,1},\ R_{2,2},\ ...,\ R_{N,1},\ R_{n,2},\ ...,\ R_{N,N} \approx I$.

Paso 1: Tomar $h = b - a$,

$$R_{1,1} = \frac{h[f(a) + f(b)]}{2}$$

Paso 2: Salida: $R_{1,1}$.

Paso 3: Para $i = 2, 3, ..., N$, seguir los pasos 4-8:

Paso 4: Tomar $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - .5)h)\right]$ (aproximación usando regla de los Trapecios)

Paso 5: Para $j = 2, ..., i$, tomar

$$R_{2,j} = \frac{4^{j-1}R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \text{ (Extrapolación de Richardson)}$$

Paso 6: Salida: Los números de Romberg $R_{2,j}$, $j=1,2,...,i$.

Paso 7: Tomar $h=\frac{h}{2}$ (cambiar la longitud del subintervalo).

Paso 8: Para $j=1,2,...,i$ tomar $R_{1,j}=R_{2,j}$.

Paso 9: Terminar

Este algoritmo sólo utiliza dos vectores en memoria para calcular los números de Romberg.

5.3 MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Vimos en la sección 5.1 que la fórmula de los Trapecios es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que uno y que las reglas de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{3}{8}\right)$ son exactas para polinomios de grado menor o igual que tres. Otra forma de deducir fórmulas de integración numérica que sean exactas para todos los polinomios de hasta cierto grado, se estudia a continuación:

Supongamos que queremos obtener una fórmula de integración numérica del tipo

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{Af(a)+Bf(b)}_{\text{FORMULA}} + \underbrace{E_T(f)}_{\text{ERROR TOTAL}} \tag{5.1}$$

de modo que dicha fórmula sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que uno, es decir, tal que el error $E_T(f)=0$ cuando $f(x)$ sea un polinomio de grado menor o igual que uno.

Cómo se determinan los coeficientes A y B?

Para generar ecuaciones que permitan determinar los coeficientes A y B, observe que: Si $f(x)=a_0+a_1x$ con $a_0,a_1\in\mathbf{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
E_T(f) = E_T(a_0 + a_1x) &= \int_a^b f(x)dx - Af(a) - Bf(b) \\
&= \int_a^b (a_0 + a_1x)dx - A(a_0 + a_1a) - B(a_0 + a_1b) \\
&= a_0\left[\int_a^b 1dx - A.1 - B.1\right] + a_1\left[\int_a^b xdx - A.a - B.b\right] \\
&= a_0E_T(1) + a_1E_T(x)
\end{aligned}$$

es decir,

$$E_T(a_0 + a_1x) = a_0\,E_T(1) + a_1\,E_T(x)$$

Así que

$$E_T(a_0 + a_1x) = 0 \text{ para todo } a_0, a_1 \in \mathbf{R} \text{ si y sólo si } E_T(1) = 0 \text{ y } E_T(x) = 0$$

es decir, la fórmula buscada es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que uno si y sólo si la fórmula es exacta para las funciones polinómicas básicas de grado menor o igual que uno: $f_0(x) \equiv 1$ y $f_1(x) = x$. De acuerdo con lo anterior, **para determinar los coeficientes A** y **B**, en la fórmula buscada, basta sustituir $f(x)$ por **1** y $f(x)$ por **x** en la ecuación (5.1) con $E_T(f) = 0$.

Haciendo dichas sustituciones, obtenemos

$$E_T(1) = \int_a^b 1dx - A \cdot 1 - B \cdot 1 = 0$$

$$E_T(x) = \int_a^b xdx - A \cdot a - B \cdot b = 0$$

es decir, se obtiene el sistema lineal de dos ecuaciones en las dos incógnitas **A**, **B**:

$$\begin{cases} A + B = b - a \\ aA + bB = \dfrac{b^2 - a^2}{2} \end{cases}$$

Como este sistema tiene solución única $A = B = \dfrac{b-a}{2}$, entonces la fórmula obtenida es

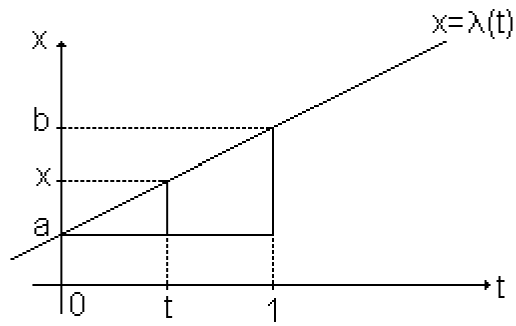
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

que es la ya conocida regla simple de los Trapecios para f en [a,b] (verifique que esta fórmula no es exacta para todos los polinomios de grado dos!).

El trabajo realizado antes en el intervalo $[a,b]$ puede hacerse, sin pérdida de generalidad, en el intervalo $[0,1]$, pues la función lineal

$$\begin{array}{rcl} \lambda : [0,1] & \to & [a,b] \\ t & \to & \lambda(t) = (b-a)t + a \end{array}$$

es uno a uno y sobre, además $\lambda(0) = a$, $\lambda(1) = b$ ($\lambda^{-1}(a) = 0$, $\lambda^{-1}(b) = 1$). Vea la FIGURA 5.5 como ayuda para construir la función $x = \lambda(t)$.



$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{t}{1} \Rightarrow x - a = (b-a)t$$

FIGURA 5.5

Si en la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

hacemos el cambio de variable $x = (b-a)t + a$, entonces $dx = (b-a)dt$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f((b-a)t + a)(b-a)dt = (b-a)\int_0^1 f((b-a)t + a)dt$$

En general, la función lineal

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \lambda : [c,d] & \to & [a,b] \\ t & \to & \lambda(t) = \dfrac{b-a}{d-c}(t-c) + a \end{array}}$$

es uno a uno y sobre, y además $\lambda(c) = a$ y $\lambda(d) = b$ ($\lambda^{-1}(a) = c$, $\lambda^{-1}(b) = d$). Si en la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

hacemos el cambio de variable

$$x = \frac{b-a}{d-c}(t-c) + a$$

obtenemos

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{d-c}\int_c^d f(\lambda(t))dt = \frac{b-a}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{b-a}{d-c}(t-c)+a\right)dt}$$

Observe que como λ es lineal en t, si $f(x)$ es polinomial, entonces $f(\lambda(t))$ es también polinomial en t y del mismo grado. Por consiguiente, la exactitud de una fórmula no se altera al hacer el cambio de variable indicado antes, es decir, si una fórmula de integración numérica es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que **m** en la variable x en $[a,b]$, también lo será para todos los polinomios correspondientes en la variable t en $[c,d]$ y recíprocamente.

Como ejemplo, supongamos que queremos **determinar los coeficientes A**, **B** y **C** de modo que la fórmula

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \underbrace{Af(0) + Bf\left(\frac{1}{2}\right) + Cf(1)}_{\text{fórmula}}$$

sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que dos.

Siguiendo la misma idea del ejemplo anterior se tiene que: la fórmula buscada será exacta para todos los polinomios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, de grado menor o igual que dos, si y sólo si la fórmula es exacta para las funciones polinómicas básicas de grado menor o igual que dos $1,\ x,\ x^2$.

Luego para **determinar los coeficientes A**, **B** y **C** basta resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} 1 = \int_0^1 1dx = A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 1 \\ \frac{1}{2} = \int_0^1 xdx = B\frac{1}{2} + C\cdot 1 \\ \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2dx = B\frac{1}{4} + C\cdot 1 \end{cases}$$

es decir, debemos resolver el sistema lineal de tres ecuaciones en las tres incógnitas A, B, C:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ \frac{1}{2}B + C = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}B + C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La solución de este sistema es $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{4}{6}$ y $C = \frac{1}{6}$.

Así que la fórmula obtenida es

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{6}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1)$$

que es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que dos. Como **ejercicio** verifique si esta fórmula es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que tres. Es exacta esta fórmula para todos los polinomios de grado menor o igual que cuatro?

Si usamos el cambio de variable $x = (b-a)t + a$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= (b-a)\int_0^1 f((b-a)t + a)dt \\ &\approx (b-a)\left[\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \end{aligned}$$

que coincide con la regla simple de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ aplicada a la función f en el intervalo $[a,b]$.

El método ilustrado en los ejemplos anteriores para encontrar fórmulas de integración numérica se conoce como **método de los coeficientes indeterminados**.

5.4 MÉTODO DE CUADRATURA GAUSSIANA

En las fórmulas de integración numérica o de cuadratura estudiadas hasta aquí para aproximar el valor de

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

se ha usado siempre una partición regular $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ del intervalo $[a,b]$, es decir, los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se han dado igualmente espaciados. Si se quita esta condición, pueden diseñarse fórmulas de integración numérica más precisas escogiendo adecuadamente los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Una de estas fórmulas es la cuadratura Gaussiana, que se puede presentar en los siguientes términos:

La **cuadratura Gaussiana** consiste en obtener los valores de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el intervalo $[-1,1]$ (podemos trabajar en $[-1,1]$ en vez de trabajar en $[a,b]$ y luego usar un cambio de variable como se hizo en la sección anterior) y los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \underbrace{\sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)}_{\text{FORMULA}} \qquad \textbf{(5.2)}$$

sea exacta para todos los polinomios de grado tan alto como sea posible. Esta idea se debe a Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Este proceso involucra la determinación de 2n incógnitas, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde, en principio, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sólo están restringidos a que la función f esté definida en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1,1]$.

Los coeficientes A_j y los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son determinados de modo que el **error**

$$E_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = 0 \qquad \textbf{(5.3)}$$

para todos los polinomios $f(x)$ de grado tan alto como sea posible.

Para derivar ecuaciones que permitan obtener los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, notemos, como en el caso del método de los coeficientes indeterminados, que si $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$, entonces

$$\begin{aligned}
E_n(f) &= E_n\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m\right)\\
&= \int_{-1}^{1}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m\right)dx - \sum_{j=1}^{n} A_j\left(a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2 + \dots + a_mx_j^m\right)\\
&= a_0\underbrace{\left[\int_{-1}^{1} 1dx - \sum_{j=1}^{n} A_j\cdot 1\right]}_{E_n(1)} + a_1\underbrace{\left[\int_{-1}^{1} xdx - \sum_{j=1}^{n} A_jx_j\right]}_{E_n(x)} + a_2\underbrace{\left[\int_{-1}^{1} x^2dx - \sum_{j=1}^{n} A_jx_j^2\right]}_{E_n(x^2)} + \dots\\
&\quad + a_m\underbrace{\left[\int_{-1}^{1} x^mdx - \sum_{j=1}^{n} A_jx_j^m\right]}_{E_n(x^m)}\\
&= a_0E_n(1) + a_1E_n(x) + a_2E_n\left(x^2\right) + \dots + a_mE_n\left(x^m\right)
\end{aligned}$$

Por consiguiente: El error $E_n\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m\right) = 0$ para **todos** los polinomios de grado menor o igual que **m** si y sólo si $E_n\left(x^i\right) = 0$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Volviendo al tema de cómo determinar los coeficientes A_j, $j = 1, 2, \dots, n$, y los puntos de la partición x_j, $j = 1, 2, \dots, n$, tenemos los siguientes casos particulares:

CASO 1: $n = 1$. En este caso

$$\begin{aligned}
E_1(f) &= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{j=1}^{1} A_jf(x_j)\\
&= \int_{-1}^{1} f(x)dx - A_1f(x_1)
\end{aligned}$$

Así que queremos encontrar A_1 y x_1 tales que $E_1(f) = 0$ para todos los polinomios $f(x)$ de grado tan alto como sea posible.

Como hay dos incógnitas por determinar, consideraremos al menos dos ecuaciones, una para $f(x) \equiv 1$ y otra para $f(x) = x$, lo que nos lleva a

$$\int_{-1}^{1} 1dx - A_1\cdot 1 = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} xdx - A_1x_1 = 0$$

es decir, resulta el siguiente sistema no-lineal de dos ecuaciones en las dos incógnitas A_1 y x_1:

$$\begin{cases} 2 - A_1 = 0\\ A_1x_1 = 0 \end{cases}$$

Como la única solución de este sistema es $A_1 = 2$ y $x_1 = 0$, entonces la fórmula obtenida es

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)}$$

que es llamada **regla del punto medio**, y es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que uno, como la regla de los Trapecios. (**Verifique** que la regla del punto medio no es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que dos!).

CASO 2: $n = 2$. En este caso

$$\begin{aligned} E_2(f) &= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{j=1}^{2} A_j f(x_j) \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)dx - A_1 f(x_1) - A_2 f(x_2) \end{aligned}$$

Así que, esta vez, debemos encontrar A_1, A_2, x_1 y x_2 tales que $E_2(f) = 0$ para todos los polinomios $f(x)$ de grado tan alto como sea posible. Consideramos entonces cuatro ecuaciones, una para cada una de las funciones polinómicas básicas de grado menor o igual que tres x^i, $i = 0, 1, 2, 3$, con lo que obtenemos

$$\int_{-1}^{1} 1dx - A_1 \cdot 1 - A_2 \cdot 1 = 0$$

$$\int_{-1}^{1} xdx - A_1 x_1 - A_2 x_2 = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2 = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx - A_1 x_1^3 - A_2 x_2^3 = 0$$

es decir,

$$\begin{cases} A_1 \qquad + A_2 = 2 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema resultante es no-lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, y se puede verificar que la solución de este sistema es $A_1 = 1 = A_2$, $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, así que la fórmula obtenida es

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

que es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que tres, como en la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$. (**Verifique** que la fórmula anterior no es exacta para todos los polinomios de grado cuatro).

En general, para **n** tenemos, como ya mencionamos antes, **2n** incógnitas $A_1, A_2, ..., A_n$, $x_1, x_2, ..., x_n$, y queremos que $E_n(x^i) = 0$ para $i = 0, 1, ..., 2n-1$, lo que nos conduce al siguiente sistema no-lineal de **2n** ecuaciones con **2n** incógnitas

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} A_j x_j^i = \int_{-1}^{1} x^i dx = \left.\frac{x^{i+1}}{i+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} 0, & i = 1,3,...,2n-1 \\ \dfrac{2}{i+1}, & i = 0,2,...,2n-2 \end{cases}}$$

La solución de estos sistemas se ve que no es fácil, y precisamente por la dificultad que se presenta al trabajar con estos sistemas no-lineales, hay otra teoría más general, pero que no presentaremos aquí. En dicha teoría se puede demostrar que el error $E_n(f)$ viene dado por

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$$

para algún $\xi \in (-1, 1)$.

La TABLA 5.3 siguiente, muestra los valores de los puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ y los valores de los coeficientes $A_1, A_2, ..., A_n$, correspondientes a los valores de $n = 1, 2, 3, 4, 5$ para la fórmula de cuadratura llamada de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$$

n	Coeficientes A_j, $j = 1,...,n$	Nodos x_j, $j = 1,...,n$	Error de fórmula

1	$A_1 = 2$	$x_1 = 0$	$\approx f''(\xi)$
2	$A_1 = 1$ $A_2 = 1$	$x_1 = -.5773502692$ $x_2 = .5773502692$	$\approx f^{(4)}(\xi)$
3	$A_1 = .5555555556$ $A_2 = .8888888889$ $A_3 = .5555555556$	$x_1 = -.7745966692$ $x_2 = 0.0$ $x_3 = .7745966692$	$\approx f^{(6)}(\xi)$
4	$A_1 = .3478546451$ $A_2 = .6521451549$ $A_3 = .6521451549$ $A_4 = .3478546451$	$x_1 = -.8611363116$ $x_2 = -.3399810436$ $x_3 = .3399810436$ $x_4 = .8611363116$	$\approx f^{(8)}(\xi)$
5	$A_1 = .2369268851$ $A_2 = .4786286705$ $A_3 = .5688888889$ $A_4 = .4786286705$ $A_5 = .2369268851$	$x_1 = -.9061798459$ $x_2 = -.5384693101$ $x_3 = 0.0$ $x_4 = .5384693101$ $x_5 = .9061798459$	$\approx f^{(10)}(\xi)$

TABLA 5.3

Si se desea consultar la teoría sobre Cuadratura Gaussiana se puede ver Kincaid, 1972, páginas 456-465.

Ejemplo 5.4 Use el método de cuadratura Gaussiana con $n = 2$ y $n = 3$ para estimar

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx$$

Solución: Para usar los datos de la TABLA 5.3, primero hacemos el cambio de variable

$$\lambda : [-1,1] \to \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$t \quad \to \quad \lambda(t) = \frac{\frac{\pi}{3}}{1+1}(t+1) = \frac{\pi}{6}(t+1) = x$$

con el cual

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{\pi}{6}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}(t+1)\right) dt$$

i) Si $n = 2$, entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx \approx \frac{\pi}{6}\left\{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}(-.5773502692+1)\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}(\ .5773502692+1)\right)\right\}$$
$$= .308208655$$

Compare este resultado con el obtenido usando la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$.

ii) Si $n = 3$, entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx \approx \frac{\pi}{6}\left\{.5555555556\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}(-.7745966692+1)\right)\right.$$
$$+.8888888889\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}(0+1)\right)$$
$$\left.+.5555555556\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}(\ .7745966692+1)\right)\right\}$$
$$= .307081826.$$

El valor exacto de la integral dada es

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2 x dx = .3070924246\ldots \quad \blacklozenge$$

TALLER 5.

1. a) Use las reglas de los Trapecios, Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ y Simpson $\left(\frac{3}{8}\right)$ con seis subintervalos para obtener valores aproximados de cada una de las siguientes integrales

i) $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$ **ii)** $\int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx$ **iii)** $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ **iv)** $\int_0^1 e^{x^2} dx$

v) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x}dx$ **vi)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ **vii)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ **viii)** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}\left(x^2\right)dx$

b) Para cada uno de los valores obtenidos en **a)** encuentre cotas para el error en la aproximación calculada y estime, a partir de esas cotas, con cuántas cifras decimales exactas aproxima dicho valor al valor exacto. Desprecie los errores de redondeo.

2. Si $\displaystyle\int_0^{0.8} f(x)dx = 2$ y nos dan la tabla siguiente

x_k	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.8
$f(x_k)$	5	8	6	3	0	-3	-3	5

Emplee la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ para estimar $f(.7)$.

3. La siguiente tabla muestra valores aproximados de una función f y los correspondientes errores de redondeo

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$\tilde{f}(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675
Error en $f(x)$	2×10^{-6}	-2×10^{-6}	$-.9\times10^{-6}$	$-.9\times10^{-6}$	2×10^{-6}

Use **todos** los datos de la tabla anterior y la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ para aproximar el valor de $\displaystyle\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$, y calcule el error de redondeo total al aplicar dicha regla.

4. a) Determine el menor número de subintervalos **N** necesarios para obtener una aproximación de $\displaystyle\int_1^{2.5} \ln x\,dx$, con una precisión de por lo menos cinco cifras decimales exactas, usando la regla de los Trapecios y la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Calcule la aproximación correspondiente, en cada caso. Desprecie los errores de redondeo.

b) Responda la pregunta planteada en **a)** para cada una de las integrales en el problema **1. a)**.

5. a) Utilice el método de los coeficientes indeterminados para generar una fórmula de integración numérica del tipo

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$$

que sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que cuatro.

b) Verifique que la fórmula obtenida en **a)** es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que cinco, y que no es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que seis.

c) Aproxime $\ln 2$ por medio de la fórmula obtenida en **a)**. Cuál es el error que se comete en la aproximación?

Nota: $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

6. Use la regla de Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ con $N=6$ y un cambio adecuado de variable para estimar $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^5}dx$.

7. Use las reglas de los Trapecios y Simpson $\left(\frac{1}{3}\right)$ con $N=10$ para aproximar la cuarta parte de la longitud de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Concluya, a partir de las cotas teóricas para el error total, cuál es la calidad de la aproximación obtenida en cada caso.

8. Use el método de Romberg con $N=2$ para aproximar cada una de las integrales del ejercicio **1. a)**.

9. Use el método de cuadratura Gaussiana con $n=2$ y $n=3$ para aproximar cada una de las integrales del ejercicio **1. a)**.

10. Encuentre una fórmula de cuadratura del tipo indicado

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \underbrace{c\sum_{j=0}^{2} f(x_j)}_{\text{fórmula}}$$

que sea exacta para todos los polinomios cuadráticos. Estas fórmulas son conocidas como fórmulas de cuadratura de Chebyshev.

11. a) Encuentre una fórmula del tipo

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx \approx \underbrace{\sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)}_{\text{fórmula}}$$

con $n=1$ que sea exacta para todos los polinomios $f(x)$ de grado menor o igual que tres.

b) Repita con $n=2$, haciendo la fórmula exacta para todos los polinomios $f(x)$ de grado menor o igual que cinco.

12. Determine los coeficientes A_0, A_1 y A_2 que hacen que la fórmula

$$\int_{0}^{2} f(x)dx \approx \underbrace{A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)}_{\text{fórmula}}$$

sea exacta para todos los polinomio de grado menor o igual que tres.

13. a) Verifique que la siguiente fórmula de cuadratura Gaussiana es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que cinco.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \underbrace{\frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}_{\text{fórmula}}$$

b) Muestre cómo puede ser usada la fórmula dada en **a)** para calcular $\int_{a}^{b} f(x)dx$, y aplique este resultado para evaluar cada una de las siguientes integrales

i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x dx$ $\int_{0}^{4} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$